

Dificultades del alumnado en Económicas y Empresariales al enfrentarse al Cálculo Integral

Martín Caraballo, Ana M. ammarcar@upo.es

Paralera Morales, Concepción cparmor@upo.es

Tenorio Villalón, Ángel F. afternorio@upo.es

*Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide*

RESUMEN

El cálculo integral es una herramienta básica en el estudio de los fenómenos económicos desde una perspectiva dinámica. En ese sentido, las competencias relativas a la integración de funciones elementales son claves para tratar problemas macro y microeconómicos entre otros. El presente trabajo analiza cuáles son las deficiencias y dificultades que observamos en el alumnado al cursar los contenidos habituales de Cálculo Integral en una Facultad de Ciencias Económicas.

ABSTRACT

Integral Calculus is a basic tool for the study of economical phenomena from a dynamic viewpoint. In this sense, skills related to the integration of elementary functions must be considered key when solving and working with macro- or micro-economic problems among other questions. This paper analyzes the drawbacks and lacks which we have observed in our students when studying Mathematics courses in a Faculty of Economics.

Palabras claves:

Cálculo integral; carencias en matemáticas; estudiantes de primer curso; dificultades en proceso enseñanza/aprendizaje.

Área temática: A-1. Metodología y Docencia.

1. INTRODUCCIÓN

El tratamiento del Cálculo Integral tanto en funciones de una como de varias variables es uno de los contenidos esenciales en las asignaturas de Matemáticas de cualquier grado en el que se trabaja con fenómenos que tienen un comportamiento en función del tiempo o en los que su comportamiento depende de los diferentes valores que van tomando una serie de variables o factores explicativos. Las Ciencias Económicas y Empresariales entran dentro de las disciplinas que estudian fenómenos que se enmarcan dentro de estas características y que, por tanto, requieren el poder trabajar con modelos funcionales que permitan estudiar el comportamiento del fenómeno en el futuro, bien en el corto plazo bien en el largo.

Así, en el caso de la Macroeconomía es bastante habitual tener que trabajar con ecuaciones en derivadas parciales que representan el comportamiento en función del tiempo y de otros factores, por ejemplo, la evolución que tienen la renta o la riqueza ya que no se tiene la información de esos objetos en sí, sino de la relación que mantiene con esos factores a la hora de plantear un modelo; véase Achdou *et al.* (2014) para ejemplos como el comentado. En el ámbito de la Microeconomía, existen varias cuestiones que pueden ser (y son) modeladas y tratadas utilizando ecuaciones diferenciales como puede observarse en Tsirlin y Amelkin (2010) Beissner (2013) o Marques (2014).

Sin embargo, el uso de modelos basados en ecuaciones en derivadas parciales (aunque sea a nivel de reconocer qué significan los modelos con los que se están trabajando) requiere de un conocimiento previo y adecuado de lo que serían las integrales (tanto definidas como indefinidas) y de sus aplicaciones a diferentes contextos. Precisamente, el tratamiento de las integrales, con sus propiedades y aplicaciones es el contenido propio de las asignaturas que comprenden el Cálculo Integral y por lo que es necesario que el alumnado de los grados en Ciencias Económicas y Empresariales disponga de unas mínimas competencias (y obviamente conocimientos) en el manejo y aplicación de las integrales indefinidas y definidas.

2. DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Entre el profesorado universitario que imparte asignaturas que incluyen contenidos relativos al Cálculo Integral en el primer curso de los distintos grados de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide, es general el convencimiento de que el alumnado presenta un considerable número de carencias tanto en conocimientos como en competencias matemáticas previas necesarias para poder afrontar de manera adecuada el aprendizaje de los conceptos relativos al Cálculo Integral y de sus aplicaciones prácticas al ámbito económico, siendo significativa la problemática que plantea simplemente la propia noción de integral para el alumnado.

En ese sentido, Turégano (1997) ya planteó que *“los problemas del cálculo integral no se abordan ni en la Educación Secundaria ni en el Bachillerato, sino en la Universidad, pero que es en la Educación Secundaria donde se tiene la responsabilidad de sembrar el germen del concepto de integral”*. Además, coincidimos con el discurso de este autor cuando afirma que debiera evitarse la pura algoritmización del Cálculo, pero sin tratar los fundamentos conceptuales que los sustentan. A nuestro parecer, este planteamiento lleva a un aprendizaje por parte del alumnado que simplemente se reduce a una automatización por repetición de procesos pero sin comprender (aunque sea de manera intuitiva y huyendo de cualquier tipo de formalismo) qué y por qué está realizando una serie de cálculos y aplicando una serie de procesos formales. A este respecto, el propio Turégano (1997) concluye que *“este enfoque es una de las causas del gran fracaso de los estudiantes universitarios en las asignaturas de cálculo, no ayudándoles a reconocer en un determinado problema –donde no figuren de forma explícita- una integral, una derivada, una ecuación diferencia., etc.”*. Es decir, nuestro alumnado no es capaz de interpretar cuándo en un problema se hace necesario realizar una integral o una derivada a partir del fenómeno o concepto económico (por ejemplo la variación de una variable económica a lo largo del tiempo o la acumulación de ésta en un intervalo) que se plantea estudiar sino que necesita explícitamente que se le indique que es necesario el cálculo de una integral o derivada.

Debe tenerse en cuenta que los errores que comente el alumnado en las asignaturas de Matemáticas no son más que el reflejo y manifestación de las dificultades

y obstáculos propios del aprendizaje que deben llevar a cabo. Por tanto, tal y como es aceptado de manera unánime en el ámbito educativo, se hace necesaria la detección y análisis de estos errores para poder utilizarlos efectivamente en la retroalimentación del proceso de enseñanza/aprendizaje de nuestro alumnado.

Con respecto a las características que presentan los errores a los que el alumnado se enfrenta al tratar contenidos matemáticos, Mulhern (1989) expuso que éstos surgían espontáneamente y que, por mucho que el profesorado planificase sobre los posibles errores que pudieran acontecer, terminaban siendo sorprendentes e inesperados. Igualmente, indicó como otras de su característica la persistencia que presentan y su dificultad para ser superados debido a que se basan en cómo se ha estructurado el esquema de pensamiento del alumnado y, por tanto, conllevan una reorganización de los conocimientos y de los procesos mentales que desarrolla el alumnado. Del mismo modo, planteaba también el dualismo que presentan los errores ya que éstos pueden ser tanto sistemáticos como azarosos. A este respecto, coincidimos en base a nuestra experiencia que suelen ser mucho más frecuentes los primeros basados en errores sistemáticos que son los que presentan una mayor persistencia en el alumnado que lo comete ya que no se debe a un error en la aplicación de procedimientos o conceptos sino que vienen a reflejar una comprensión equivocada de los procedimientos y/o conceptos que utilizan, muchas veces acompañados de una estructuración errónea o, al menos, inapropiada de sus procesos resolutivos, lo cual complica enormemente la subsanación del mismo ya que se ha interiorizado y automatizado esa incorrección. En relación a los errores debidos a una equivocación o despiste por el azar estos suelen ser menores y fácilmente detectables, no siendo graves en cuanto a la adquisición de las competencias matemáticas, siendo simplemente necesaria una mayor revisión por parte del alumnado para comprobar que no comete tales fallos, bien de cálculo, bien de transcripción a lo largo del desarrollo resolutivo.

El profesorado debe tener en cuenta que el alumnado en buena parte de las situaciones de error que comete no toma conciencia de éste simplemente porque está trabajado con símbolos y conceptos que no ha asimilado y que aplica de forma mecánica y repetitiva sin la comprensión necesaria para un uso competente (e incluso en ocasiones su simple lectura comprensiva) de los mismos.

Por otra parte, cuando se trabaja con estudiantes, debe tenerse en consideración las emociones que experimenta el alumnado al afrontar y enfrentarse a cualquier materia (independientemente de que se trate de Matemáticas o no). El profesorado debe trabajar con su alumnado teniendo en cuenta que las emociones que afloran en sus estudiantes intervienen inconscientemente en la asimilación de competencias ya que se desarrollan actitudes por parte del alumnado que posteriormente utiliza para la construcción de su concepción (“creencias”) de los conceptos y procedimientos independientemente de que esa construcción sea la correcta o no.

Mandler (1989) afirmó que las “nuevas tareas” a realizar por el alumnado puede llegar a causarle “bloqueos” que conllevan el afloramiento de ciertas “emociones” que tras una reiteración de la situación lleva a la aparición de “actitudes” que, como consecuencia, hace que el estudiante desarrolle ciertas “creencias” en lo relativo a los conocimientos y procedimientos que está trabajando y precisamente dichas “creencias” llevan a que se generen nuevas “emociones”, creándose de este modo un ciclo que se retroalimenta a sí mismo. Este planteamiento conlleva la necesidad de estar pendiente al respecto de la influencia que presenta el dominio afectivo sobre el dominio cognitivo y utilizar esa influencia a la hora de favorecer y facilitar el aprendizaje de nuestro alumnado. Así, las creencias que reflejan ciertos juicios sobre un conjunto de conceptos, las actitudes que representan distintas reacciones emocionales sobre ciertos objetos y las emociones que son reacciones a ciertos estímulos, forman parte del dominio afectivo que debe ser tenido en consideración por el profesorado a la hora de afrontar el proceso de enseñanza/aprendizaje con su alumnado.

En relación a los errores que encontramos y las dificultades que suponen la existencia y persistencia de éstos en nuestro alumnado, se desarrollará el presente trabajo que se basa en la perspectiva que los autores han adquirido en su experiencia docente en relación a los errores tanto algebraicos como conceptuales y procedimentales que cometen más asiduamente el alumnado en primer curso al abordar la temática del Cálculo Integral. Debe tenerse en cuenta que buena parte de los errores (independientemente de su tipología) están en relación y son consecuencia de la “algebrización” del cálculo diferencial e integral que tuvo lugar a finales del siglo XIX y principios del siglo XX con el cambio de paradigma dentro de la actividad matemática

y que supuso la imposición del formalismo como herramienta para la demostración y el análisis de resultados matemáticos, rechazando la mera visualización que abogaba el intuitivismo. En este sentido, la denominada “gran crisis de los fundamentos” acontecida en las Matemáticas hacia 1900 con la introducción de la teoría de conjuntos por parte de Cantor puso el énfasis de las Matemáticas más en el rigor y la demostración formal que en la intuición acerca de los conceptos y procedimientos. Esto, en principio, resultó muy beneficioso para formalizar todas las disciplinas que conformaban el cuerpo de las Matemáticas, pero a la larga ha planteado algunas dificultades en lo que a la transmisión de conocimientos se refiere ya que el profesorado (y más especialmente el universitario) pretende transmitir ese conocimiento desde una perspectiva formalista y por tanto, las presentaciones visuales de los conceptos y procedimientos no suelen emplearse de manera habitual para comunicar ideas y conceptos en nuestra materia; pese a que serían de gran utilidad para conseguir que nuestro alumnado fuera competente en la materia trabajada. Precisamente, Orton (1983) analizó cómo la introducción al alumnado de los conceptos y procedimientos propios de la integración se ve oscurecida por la manipulación algebraica que se requiere con el planteamiento actual para su tratamiento. Sobre la aparición de la teoría de conjuntos, la gran crisis de fundamentos y su influencia en el formalismo de las Matemáticas en la actualidad puede consultarse Fedriani y Tenorio (2010) o Sentilles (2011, p.74).

Volviendo a la temática que nos ocupa, el Cálculo Integral, el profesorado podría, por ejemplo, introducir y tratar la noción de integral definida, en una o varias variables, a partir de su origen práctico e histórico relativo al cálculo de áreas y volúmenes de figuras o cuerpos geométricos, para después plantear la posibilidad de considerar una simple suma con “infinitos” sumandos de modo que se obtenga una acumulación de cantidades instante a instante. Sin embargo, al alumnado universitario se le introduce el concepto de integral como límites de las sumas de Riemann (pese a las dificultades que plantea introducir el concepto de límite en titulaciones que no son del ámbito científico-técnico) para seguidamente proceder a relacionar esa noción de límite de sumas con el de área bajo una curva en el caso de la integral definida de una función de una variable, lo cual no permite su visualización ya que no se procede a construir el área en cuestión tal y como indican autores como Thompson y Silverman (2008).

Por su parte, Llorens y Santoja (1997) indicaron otras deficiencias a la hora de trabajar el Cálculo Integral y que hemos podido constatar en nuestra experiencia docente con el alumnado de Ciencias Económicas y Empresariales, así, hacían referencia a la identificación de la integral con una primitiva, lo cual les resulta un proceso puramente algebraico que no saben posteriormente aplicar para el cálculo de áreas pese a que sean competentes en el cálculo de los métodos de integración. Igualmente, el alumnado suele identificar las integrales definidas con la aplicación de la regla de Barrow, incluso cuando dicha regla de cálculo no es aplicable: bien porque estamos ante una integral impropia o ante una función cuya primitiva no es expresable mediante funciones elementales. Del mismo modo, al alumnado no le plantea problemas asociar los conceptos de área y de integral, pero solo a nivel de que existe alguna relación entre ellos aunque sin saber cuál es dicha relación y que, en esencia, el cálculo de un área es el cálculo de una integral definida.

En conclusión, nuestro alumnado sí es capaz de asimilar y automatizar (más que aprender y utilizar competentemente) las herramientas y conceptos referentes por ejemplo, a la integración impropia desde una perspectiva carente de cualquier contextualización y, desde luego, desvinculando los contenidos del cálculo integral que ya ha podido tratar o que trata posteriormente. En ese sentido, el alumnado se limita a memorizar criterios y técnicas de cálculo que, fuera de su contexto natural, no tienen la misma riqueza y significado y que, por tanto, después no son capaces de aplicar de manera competente cuando afrontan una situación o fenómeno económico que requiere del Cálculo Integral ya que lo que han aprendido carece de un significado para ellos.

Por poner algunos ejemplos, nuestro alumnado termina sin tener un conocimiento de cuándo está definida una integral de Riemann (es decir, las condiciones necesarias de definición); interpreta las integrales definidas como áreas en cualquier caso sin pensar en el significado que presenta este concepto dependiendo de que la función sea de signo constante o no; o bien no asumen la integración como el proceso opuesto a la derivación y que permite obtener la expresión de un fenómeno económico a partir de la expresión funcional que permite modelar el comportamiento de la variación de ese fenómeno en función del tiempo (que es el planteamiento básico de

la resolución de una integral y, en general, de una ecuación diferencial en un contexto económico).

3. EL CÁLCULO INTEGRAL EN LAS MATEMÁTICAS DE PRIMER CURSO

Como hemos indicado previamente, las dificultades que encontramos en nuestro alumnado a la hora de afrontar el Cálculo Integral debe tener en consideración el punto del que parte nuestro alumnado tras su periplo por la Educación Secundaria (no entraremos en este trabajo a plantearnos las dificultades adicionales que puede tener que afrontar aquel alumnado cuya vía de acceso no es el Bachillerato sino que accede por ejemplo por un Ciclo Formativo de Grado Superior). En ese sentido y en base a la normativa vigente que articula el currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato (i.e. Real Decreto 1105/2014, Orden ECD/65/2015, Decreto 110/2016 y Orden de 14 de julio de 2016), el tratamiento de conceptos relacionados con el cálculo integral aparece en el segundo curso de Bachillerato. En el caso de la asignatura de Matemáticas II que estaría orientada para Ciencias y Tecnología, el currículo recoge los siguientes descriptores:

- Primitiva de una función, integral indefinida y técnicas elementales para el cálculo de primitivas (por parte del currículo ministerial); haciéndose énfasis en primitivas inmediatas (según la orden de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía).
- Integral definida y teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral (por parte del currículo ministerial); haciéndose referencia explícita a las sus propiedades de la integral indefinida y la regla de Barrow (según orden de la Consejería de Educación).
- Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables.

Por su parte, la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, orientada para titulaciones del ámbito de las ciencias sociales y entre las que se

encontrarían los estudios propios de las Ciencias Económicas y Empresariales incluye los siguientes descriptores:

- Concepto de primitiva y cálculo de primitivas: propiedades básicas e integrales inmediatas.
- Integral definida y regla de Barrow aplicadas a funciones inmediatas.
- Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencilla que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.

En ese sentido, el Cálculo Integral y sus rudimentos más básicos se introducirían el año previo al acceso del alumnado a los estudios universitarios, pero en el caso de las titulaciones que nos corresponden se limitarían a simplemente un tratamiento muy básico y rudimentario que, aunque desde una visión técnica de lo que sería conveniente haber cursado previamente podría parecer insuficiente, si se tratase conceptual y competencialmente de manera adecuada, podría ser más que suficiente para que el alumnado tuviera un conocimiento previo de la noción que le permitiera afrontar el Cálculo Integral en sus estudios universitarios en Ciencias Económicas y Empresariales. Sin embargo, la realidad a la que se enfrenta el profesorado de Matemáticas en el aula universitaria es muy diferente ya que, por un lado, el currículo que acabamos de indicar dará la primer hornada de estudiantes en la Comunidad de Andalucía en este curso 2016/2017 y llegará a nuestras aulas en el curso 2017/2018 y, por tanto, realmente el alumnado con el que ha interactuado en el aula el profesorado es el que provenía del anterior currículo formativo de Bachillerato en el que el concepto de integral solo se introducía (de una manera aún más simplificada a la que se ha expuesto arriba) al alumnado que cursaba el segundo curso de Bachillerato orientado a estudios posteriores en Ciencias y Tecnología. Eso conllevaba que el alumnado que accedía a estudios en ciencias económicas o empresariales era un estudiante que había trabajado el cálculo diferencial, pero que no había nunca tratado con el concepto de integral ni intuitiva ni mucho menos formalmente ya que el grueso del alumnado que ha estado accediendo a los títulos ofertados por cualquier Facultad de Ciencias Económicas o de Ciencias Empresariales lo hacían a través de la opción del Bachillerato orientado a las Ciencias

Sociales. Pero es más, en el caso del alumnado que ha cursado el Bachillerato orientado a títulos de Ciencias y Tecnología y que finalmente ha optado por cursar unos estudios de económicas o empresariales, en muchas ocasiones tampoco muestra el haber adquirido las competencias relativas al cálculo integral que supuestamente debería de haber desarrollado durante Bachillerato ya que resulta que la formación recibida en cuanto al cálculo integral se ha centrado en detectar y resolver los problemas tipo que aparece en las pruebas de acceso a la Universidad, siendo secundaria una correcta asimilación de los conceptos y competencias pertinentes.

Tanto en uno como en el otro caso, estas circunstancias arriba descritas conllevan que el alumnado que cursa una asignatura de Matemáticas en primer curso en grados relativos a las ciencias económicas y empresariales, puede tener que afrontar una serie de problemas y dificultades que bien se deben a un primer acercamiento al Cálculo Integral y al concepto de integral o bien a la mera cuestión de una serie de automatismos y simplificaciones conceptuales realizadas durante ese segundo curso de Bachillerato ante la necesidad de tipificar las resoluciones y crear una taxonomía reducida de problemas sobre Cálculo Integral, actuando más por repetición que por adquisición de competencias.

Debe tenerse en cuenta que, por ejemplo en el caso de la Universidad Pablo de Olavide, el Cálculo Integral está presente en asignaturas como: Matemática Empresarial I y Estadística Empresarial I, en primer curso, y Estadística Empresarial II, en segundo curso, de los grados en Administración y Dirección de Empresas y en Finanzas y Contabilidad, además de los dobles grados entre alguno de estos dos títulos y Derecho. Igualmente, el Cálculo Integral es parte esencial y clave en las asignaturas Matemáticas para el Análisis Económico I y III del grado en Análisis Económico.

Conceptos como el excedente del consumidor y del productor se utilizan en la asignatura Introducción a la Economía y las medidas de distribución de la renta en Historia Económica, ambas asignaturas de primer curso de los grados a los que se ha hecho referencia anteriormente. Todo ello sin tener que considerar las ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales que, junto a los sistemas dinámicos, son herramientas claves en el tratamiento de problemas macro y microeconómicos que tendrán que trabajar en cursos superiores.

4. ACCIONES A IMPLEMENTAR PARA RESOLVER PROBLEMAS

En vista de lo comentado previamente, el profesorado universitario debería promover la visualización matemática a la hora de trabajar el Cálculo Integral, y las nociones relacionadas con éste, utilizando para ello diferentes representaciones y aprovechando las ventajas que ofrecen las tecnologías de la información, siempre desde la perspectiva de un uso racional de las mismas. En general, el uso de estas tecnologías permite trabajar la visualización de los conceptos matemáticos y, por tanto, facilita dar un significado y contexto concreto a las nociones matemáticas que se trabajan con el alumnado. En ese sentido, Turégano (1994) desarrolló una investigación en la que utilizaba la visualización para dar significado al concepto de integral definida basándolo en la idea del área bajo la curva.

En parte, una posible vía de solución a los problemas aquí presentados podría basarse en el uso de ciertos programas de geometría dinámica en el aula como recurso didáctico que nos facilite el aprendizaje de los conceptos tratados ya que con estos programas se le puede transmitir al alumnado la naturaleza dinámica del concepto y, por ejemplo, se podría trabajar el concepto de integral definida a partir de su visualización geométrica como áreas de regiones e incluso como compensaciones entre “áreas” positivas y negativas cuando se están considerando funciones de signo no constante. En este sentido, se ha utilizado en clase el software de geometría dinámica GeoGebra para realizar tratamientos de este estilo e incluso se ha puesto a disposición del alumnado recursos del estilo del que aparece en el siguiente URL, <https://www.upo.es/economia/metodos-dav/excedentes/excedentes2.html>, para trabajar conceptos como, en el caso del ejemplo, una de las aplicaciones del Cálculo Integral al ámbito de la Economía con explicaciones paso a paso que utilizan *applets* dinámicos realizados con GeoGebra y cuyo objetivo es la mejora de la comprensión y asimilación del concepto de integral definida por parte del alumnado.

Alternativamente, el uso de un recurso tan sencillo como un simple video puede ser de gran utilidad para facilitar la asimilación y afianzamiento de ciertos conceptos.

Como ejemplo se indica la experiencia realizada desde hace algunos años con nuestro alumnado de nuevo ingreso para reforzar la asimilación del método de integración por partes para lo cual se hace uso del video cuya URL es <https://www.youtube.com/watch?v=-reFBJ4R9iA> y que de una manera jocosa y lúdica introduce la regla para la asignación de las variables u y v a la hora de afrontar una integración por este método. En base a nuestra experiencia, ha de indicarse los escasos minutos que requiere su visualización en clase facilita la asimilación del método por parte del alumnado en cuanto a cómo y cuándo utilizar la integración por partes.

Finalmente, también es conveniente tener en cuenta que, centrados en el ámbito de la ciencias económicas y empresariales, el interés del profesorado a la hora de tratar el Cálculo Integral con el alumnado no debería centrarse en el puro formalismo y la aplicación de técnicas de integración que requieran una mayor o menor capacidad de técnica operativa matemática (por ejemplo, integración con cambios de variables complejos, integración cíclica o integración racional incluso), sino que el alumnado sea capaz de comprender qué es una integral y para qué se puede usar, usándola en consecuencia y de manera competente para resolver situaciones problemáticas dentro del contexto propio de la titulación en la que se mueve. Este último punto es una de las cuestiones que más cuesta al profesorado de Matemáticas ya que persiste esa visión formalista y rigurosa de la que se habló anteriormente y que proviene de esa gran crisis en los fundamentos de las Matemáticas en torno a 1900.

5. CONCLUSIONES

En vista de todo lo expuesto en el presente trabajo, hemos de concluir que pese a lo necesario y esencial que resulta la comprensión y manejo contextualizado y aplicado del Cálculo Integral en los grados relacionados con las Ciencias Económicas y Empresariales, el profesorado se encuentra con serias dificultades a la hora de trabajar estos contenidos con su alumnado: por un lado y hasta la actualidad, la mayor parte de sus estudiantes no han tenido ningún acercamiento (aunque sea a nivel intuitivo) al concepto de integral ya que no se incluye entre los contenidos y competencias que el alumnado ha de cursar en el Bachillerato orientado a los estudios en Ciencias Sociales e,

incluso en el caso en que haya estudiantes que cursaran el Bachillerato orientado a Ciencias y Tecnologías, no es seguro que hayan trabajado las integrales conceptual y contextualmente, sino que se hayan limitado a una simple automatización de resolución de problemas tipo en base a una taxonomía que permita superar las pruebas de acceso a la Universidad.

Es más, aunque el alumnado sí ha tenido que trabajar competencial y conceptualmente los conceptos y procedimientos propios del Cálculo Diferencial (es decir, derivadas), les resulta sumamente difícil relacionar estos conceptos debido a la construcción artificial que se ha generado muchas veces en su percepción de la derivada basada en el formulismo y aplicación de técnicas de cálculo sin llegar a plantearse cuál es el significado del objeto que están utilizando. En ese sentido, el profesorado tiene que afrontar la dificultad de superar una interiorización de las derivadas no basada en su comprensión sino simplemente persiguiendo su cálculo formal, a lo que debe sumarse el tratamiento simbólico que suele darse del concepto de integral como otra operación más (la inversa de la derivada) y en la que otra vez se hace un enfoque centrado en los métodos de obtención de primitivas. En ese sentido, el profesorado debería hacer un esfuerzo por trabajar la visualización de los conceptos que se trabajan con el Cálculo Integral para facilitar su comprensión conceptual y favorecer que el alumnado adquiriera una competencia práctica en el uso de los conceptos relacionados con la integración para poder tratar situaciones prácticas que estén contextualizadas en el ámbito de la Economía y la Empresa. Esa visualización debería primar sobre la insistencia que tiene el profesorado universitario en desarrollar una serie de métodos formales de cálculo de primitivas que, en muchos casos, no son tan importante para su posterior desempeño profesional como sí lo es tener un conocimiento adecuado de los conceptos y cuál es su utilidad para resolver problemas económicos.

En ese sentido, en este trabajo no solo se han indicado algunos de los problemas que afronta nuestro alumnado y algunas de las posibles causas de estas dificultades, sino que también se ha indicado cuál podría ser una vía de solución para con este problema por parte del profesorado universitario: el uso de la visualización para tratar el Cálculo Integral, reduciendo la relevancia e importancia del tratamiento formal y puramente simbólico de las integrales que, no solo resulta en muchos casos excesivo para el

alumnado, sino que muchas veces no es imprescindible para que éste adquiriera las competencias realmente necesarias y claves en lo que corresponde al Cálculo Integral.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHDOU, Y; BUERA F.J.; LASRY J.-M.; LIONS, P.-L. y MOLL, B. (2014). “Partial differential equation models in macroeconomics”. *Phil. Trans. R. Soc. A* 372: 20130397 (19pp.).
- BEISSNER, P. (2013). “Microeconomic Theory of Financial Markets under Volatility Uncertainty”. Ph.D. Thesis, Bielefeld University, Alemania.
- DECRETO 110/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 122, de 28 de junio de 2016, pp. 11-26.
- FEDRIANI, E.M. y TENORIO, A.F. (2010). “Matemáticas del más allá: el infinito”. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 21, pp. 37-58.
- LLORENS, J.L. y SANTOJA, F.J. (1997). “Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje de concepto de integral”. *Divulgaciones Matemáticas*, 5 (½), pp. 61-76.
- MANDLER, G. (1989). “Affect and learning: Cases and consequences of emotional interactions” En D.B. McLeod & V.M. Adams (eds.). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlang, pp. 3-19.
- MARQUES, J. (2014). “An Application of Ordinary Differential Equations in Economics: Modeling Consumer’s Preferences Using Marginal Rates of Substitution”. En N.E. Mastorakis, F. Mainardi & M. Milanova (eds.). *Mathematical Methods in Science and Mechanics. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series 33*. Lisboa: WSEAS Press.
- MULHERN, G. (1989). “Between the ears: Making inferences about internal process”. En B. Greer & G. Mulhern (eds.). *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

- ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015, pp. 6986-7003.
- ORDEN de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía 145, de 29 de julio de 2016, pp. 220-544.
- ORTON, A. (1983). "Students' understanding of integration". *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), pp. 1-18.
- REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3, de 3 de enero de 2015, pp. 169-546.
- SENTILLES, D. (2011). *A bridge to Advanced Mathematics*. Mineola, New York: Dover Publications.
- THOMPSON, P.W. y SILVERMAN, J. (2008). "The concept of accumulation in Calculus". In M.P. Carlso & C. Ramussen (eds.). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*. Washington D.C.: Mathematical Association of America, pp. 43-52.
- TSIRLIN, A.M. y AMELKIN, S.A. (2010). "Mathematical models and equilibrium in irreversible Microeconomics". *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 8(1), pp. 13-23.
- TURÉGANO, P. (1994). "Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo infinitesimal". Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, España.
- TURÉGANO, P. (1997). "El aprendizaje del concepto de integral". *Revista SUMA*, 26, pp. 39-52.