

Resolución de ecuaciones no lineales con Excel

Palencia González, Fº Javier jpalcencia@cee.uned.es

Rodríguez Ruiz, Julián julian21@cee.uned.es

*Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa I
UNED*

RESUMEN

En este artículo se va a tratar de resolver de forma aproximada ecuaciones no lineales con Excel, esto se va a poder conseguir a través de la utilización de métodos numéricos que van a permitir realizar este cometido con cierta comodidad.

La aproximación a la solución se realiza de dos formas distintas: a) mediante la confección de una plantilla ad-hoc en Excel del método numérico elegido para resolver la ecuación, por ejemplo Método de la Bisección, Método de la Secante, Método de la Régula Falsi, etc...; b) mediante la programación en VBA de un procedimiento que calcule el método numérico en cuestión. En el primer caso y como se ha indicado se van a ir creando una serie de hojas para cada uno de los métodos en estudio, en las cuales se introducirán las fórmulas de los métodos numéricos. En el segundo caso se creará un programa con código VBA que a partir de unos datos iniciales genere de forma automática la tabla de datos aproximados a la solución dependiendo del método elegido.

ABSTRACT

In this paper we will try to find approximate solutions to nonlinear equations with Excel, using numerical methods that will allow to perform this task with some easyness.

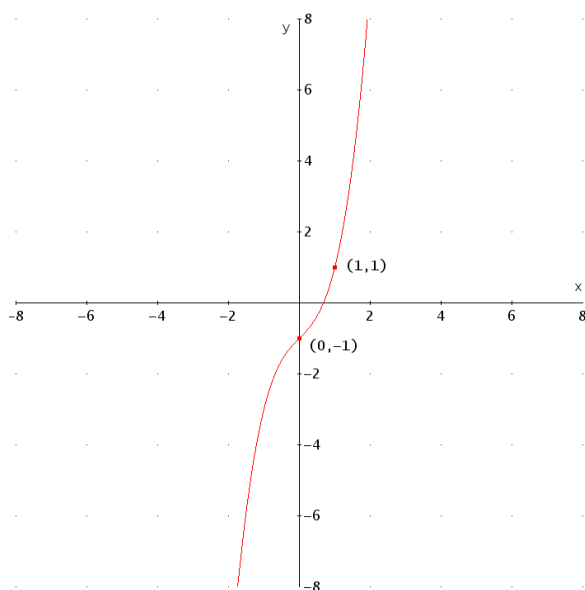
The approach to the solution is done in two ways: a) by the construction of an ad-hoc template in Excel of the numerical method chosen to solve the equation -i.e., method of bisection, method of secant, method Régula Falsi, etc ...; b) by the VBA programming procedure that computes the numeric method in question. As indicated, in the first case and we will create a series of Excell sheets for each of the methods under study, in which the formulas of numerical methods will be introduced. In the second case a program with VBA code from some initial data automatically generate a table of approximate solutions depending on the chosen method to reach the solution.

Palabras claves: Ecuaciones No Lineales; Método Bisección; Método Secante; Método Régula Falsi; Método Newton-Raphson; Excel; VBA; Métodos Numéricos.

Área temática: A1 - METODOLOGÍA Y DOCENCIA.

1. INTRODUCCIÓN

Múltiples problemas para resolverse desembocan en una ecuación no lineal en la que no es fácil a priori encontrar la solución a la misma. Resolver una ecuación no lineal es hallar las raíces de la ecuación, es decir, aquellos valores que hacen $f(x) = 0$.



En determinados casos no existe método alguno para obtener las raíces de una ecuación de forma exacta y por tanto la búsqueda y obtención de soluciones aproximadas debe ser realizada con algún método numérico.

En este artículo vamos a enumerar e implementar diversos métodos numéricos que nos permitan ver como se construyen y alcanzan las soluciones, entre los que destacan el

Método de la Bisección de Bolzano, el Método de la Secante, el Método de la Régula Falsi, el Método de Newton Raphson y el Método del Punto Fijo.

Los métodos que utilizamos van a servir tanto para ecuaciones algebraicas como para ecuaciones trascendentes.

El criterio de parada en todos estos métodos viene dado bien por la cercanía entre sí de dos aproximaciones sucesivas a la raíz c , $|c_n - c_{n-1}| < \delta$, o bien por el valor de la función en el punto, $f(c_n) < \varepsilon$

En el epígrafe 2, se analizan los diferentes métodos numéricos para resolver una ecuación no lineal y se implementan diversas plantillas en Excel que especifican la forma de alcanzar la solución en cada caso; en el epígrafe 3, se programan en VBA algunos de los métodos especificados en el epígrafe anterior, de forma que se calculen de forma automática los métodos para cualquier ecuación y finalmente en el epígrafe 4 enunciamos las conclusiones obtenidas.

2. MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1. Método de la Bisección de Bolzano

Este método consiste en localizar una solución generando una sucesión de intervalos de tamaño decreciente en cada iteración. Cómo se llega a asegurar que existe la raíz, cómo se obtiene la misma y cómo se implementa el método se muestra a continuación.

Por el teorema del valor intermedio o teorema de Bolzano se sabe que dada una función f que es continua en un intervalo $[a, b]$ y dado un cierto valor real, L , de forma que se cumpla que $f(a) \leq L \leq f(b)$, entonces existe un valor real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = L$. Es decir, se asegura que en una función continua se alcanzan todos los valores intermedios.

Por tanto, si se tiene una función continua de forma que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo, es decir, que se cumpla que $f(a) * f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio se tiene que para todo número L perteneciente al intervalo $[f(a), f(b)]$ va a existir un cierto valor c tal que $f(c) = L$. Pero tal y como está definida la función, el valor 0 pertenece al intervalo $[f(a), f(b)]$, luego en particular existirá un valor r tal que $f(r) = 0$, es decir corta al eje OX, y por tanto r es la raíz buscada.

Una vez que se ha asegurado la existencia de la raíz, se implementa el método específico para encontrarla. El método numérico consiste en ir dividiendo el intervalo a la mitad en cada paso de la iteración, es decir, en cada paso se calcula el punto medio del intervalo,

$$c_k = (a_k + b_k)/2 \quad (1)$$

y por tanto en cada iteración se dan tres posibles casos.

- Si $f(c) = 0$, entonces c es la raíz buscada
- Si $f(a) * f(c) < 0$, entonces se sigue buscando la raíz con el método en el intervalo $[a, c]$.
- Si $f(c) * f(b) < 0$, entonces se sigue buscando la raíz con el método en el intervalo $[c, b]$.

De esta forma se obtiene la siguiente sucesión de intervalos $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ y donde se cumple que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n \leq c_n = r \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Como se puede comprobar después de varias iteraciones y con suficiente esfuerzo se puede encontrar siempre una raíz con la exactitud deseada. Comparado con otros métodos, el método de bisección converge más bien despacio

Efectivamente por el teorema de la convergencia del método de la bisección, si $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de puntos medios de los subintervalos generados por el método de la bisección, entonces existe $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$ y $|r - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, \dots$, y en particular la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la raíz r , es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = r$.

Se puede finalmente calcular el número de veces n que se ha de aplicar el método para garantizar que el punto medio c_n es una aproximación a la raíz con un error menor que un cierto δ mediante la fórmula

$$n = \left(\frac{\ln(b-a) - \ln(\delta)}{\ln(2)} \right) \quad (2)$$

Ejemplo 1.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método de Bisección de Bolzano. Búsquese la raíz en el intervalo $[0, 2]$ con un error inferior a $1e-6$.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En la hoja de cálculo Excel se va a generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango "B6:I6" los encabezados de las columnas, así "k" es el número de iteraciones; "ak" es el valor de a en cada nuevo subintervalo, "bk" es el valor de b en cada nuevo subintervalo, "ck" es el punto medio de cada subintervalo hallado, y que será finalmente el valor de la raíz, "f(a)" que es el valor de la función en el punto "ak", "f(b)" que es el valor de la función en el punto "bk", "f(c)" que es el valor de la función en el punto "ck" y finalmente "|." que contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Se introducen los valores del problema y así en la celda "C7" se introduce el valor de a en el intervalo original es decir, 0 y en la celda "D7" se introduce el valor de b en el intervalo original, es decir, 2. En la celda "E7" se halla el punto medio de a y b de acuerdo a la ecuación (1), y se introduce la fórmula $=(C7+D7)/2$.

En las celdas “F7”, “G7” y “H7”, se introducen los valores calculados de $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$, mediante las fórmulas “=C7*SENO(C7)-1”, “=D7*SENO(D7)-1”, y “=E7*SENO(E7)-1”.

Una vez calculado el punto medio y el valor $f(c)$, hay que comprobar en que caso de los tres posibles se está. Para ello en la celda “C8”, de la columna “ak” se introduce la siguiente fórmula “=SI(O(Y(F7>0;H7<0);Y(F7<0;H7>0));C7;E7)” que se corresponde con el segundo caso, es decir cuando $f(a) * f(c) < 0$. De forma análoga se introduce en la celda “D8”, de la columna “bk” la fórmula “=SI(O(Y(G7>0;H7<0);Y(G7<0;H7>0));D7;E7)” que se corresponde con el tercer caso, es decir cuando $f(b) * f(c) < 0$. Y de esta forma queda confirmado el siguiente subintervalo.

Se continúa de esta forma hasta comprobar que el error que está en la columna I, y cuya fórmula en Excel es “=ABS(E8-E7)”, es menor que el solicitado. Además se sabe por la ecuación (2) que el número de iteraciones ha de ser 21.

Los resultados obtenidos están en la figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Método de la Bisección de Bolzano							
3									
4		f(x)=x*sen(x)-1	Intervalo	[0,2]					
5									
6		k	ak	b _k	ck	f(a)	f(b)	f(c)	.
7		0	0,0000000	2,0000000	1,0000000	-1,0000000	0,8185949	-0,1585290	
8		1	1,0000000	2,0000000	1,5000000	-0,1585290	0,8185949	0,4962425	0,5000000
9		2	1,0000000	1,5000000	1,2500000	-0,1585290	0,4962425	0,1862308	0,2500000
10		3	1,0000000	1,2500000	1,1250000	-0,1585290	0,1862308	0,0150510	0,1250000
11		4	1,0000000	1,1250000	1,0625000	-0,1585290	0,0150510	-0,0718266	0,0625000
12		5	1,0625000	1,1250000	1,0937500	-0,0718266	0,0150510	-0,0283617	0,0312500
13		6	1,0937500	1,1250000	1,1093750	-0,0283617	0,0150510	-0,0066428	0,0156250
14		7	1,1093750	1,1250000	1,1171875	-0,0066428	0,0150510	0,0042080	0,0078125
15		8	1,1093750	1,1171875	1,1132813	-0,0066428	0,0042080	-0,0012165	0,0039063
16		9	1,1132813	1,1171875	1,1152344	-0,0012165	0,0042080	0,0014960	0,0019531
17		10	1,1132813	1,1152344	1,1142578	-0,0012165	0,0014960	0,0001398	0,0009766
18		11	1,1132813	1,1142578	1,1137695	-0,0012165	0,0001398	-0,0005383	0,0004883
19		12	1,1137695	1,1142578	1,1140137	-0,0005383	0,0001398	-0,0001993	0,0002441
20		13	1,1140137	1,1142578	1,1141357	-0,0001993	0,0001398	-0,0000297	0,0001221
21		14	1,1141357	1,1142578	1,1141968	-0,0000297	0,0001398	0,0000550	0,0000610
22		15	1,1141357	1,1141968	1,1141663	-0,0000297	0,0000550	0,0000127	0,0000305
23		16	1,1141357	1,1141663	1,1141510	-0,0000297	0,0000127	-0,0000085	0,0000153
24		17	1,1141510	1,1141663	1,1141586	-0,0000085	0,0000127	0,0000021	0,0000076
25		18	1,1141510	1,1141586	1,1141548	-0,0000085	0,0000021	-0,0000032	0,0000038
26		19	1,1141548	1,1141586	1,1141567	-0,0000032	0,0000021	-0,0000006	0,0000019
27		20	1,1141567	1,1141586	1,1141577	-0,0000006	0,0000021	0,0000007	0,0000010
28		21	1,1141567	1,1141577	1,1141572	-0,0000006	0,0000007	0,0000001	0,0000005
29									
30									

Figura 1. Resolución mediante el Método de la Bisección de Bolzano

2.2. Método del Punto Fijo

Se denomina punto fijo de una función al valor p que cumple que $g(p) = p$. Gráficamente esto significa que la función $g(x)$ corta a la recta $f(x) = x$.

A partir del punto fijo se pueden hallar las raíces de una ecuación no lineal $f(x)$ en un determinado intervalo $[a,b]$. En efecto, se puede crear una función definida en el mismo intervalo, $g(x) = x - f(x)$, de manera que si $g(x)$ tiene un punto fijo en p , entonces se deduce que en ese valor $f(p) = 0$, y p es la raíz buscada.

El método consiste en lo siguiente, dado un valor inicial p_0 y mediante la función $g(x)$ vamos a ir generando una sucesión de valores $\{p_k\}$ obtenidos de la forma

$$p_k = g(p_{k-1}) \quad (3)$$

intentando ver si los valores p_k convergen a un determinado número p .

Se puede comprobar que si g es continua, si $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión generada por una iteración de punto fijo y si $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, entonces p es un punto fijo de $g(x)$.

Y finalmente se tiene que si g es continua en un intervalo $[a,b]$ y para cada punto $x \in [a,b]$ se cumple que $g(x) \in [a,b]$, entonces se puede asegurar que $g(x)$ tiene un punto fijo en $[a,b]$. Si además $g'(x)$ está definida en (a,b) y $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $g(x)$ tiene un único punto fijo p en (a,b) .

Ejemplo 2.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método del Punto Fijo. Búsquese la raíz en el intervalo $[0,2]$ con un error inferior a $1e-6$.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En primer lugar se construye la función g a partir de la función f y se tiene

$$g(x) = x - f(x) = x - (x \cdot \text{seno}(x) - 1)$$

Seguidamente en la hoja de cálculo Excel se va a generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango “B6:E6” los encabezados de las columnas, así “n” es el número de iteraciones; “pn” es el valor de p en cada nueva iteración, “g(pn)” es el valor de la función en el punto “pn”, y finalmente “error” que contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Como este método necesita un punto inicial p_0 , se toma éste como el punto medio del intervalo, luego $p_0 = 1$, y por tanto introducimos este valor en la celda “C7”.

En la celda “D7” se introduce la fórmula para calcular $g(p_0)$, que viene dada por “=C7-(C7*SENO(C7)-1)”. A partir de la primera iteración se puede calcular el error cometido mediante la fórmula “=ABS(C8-C7)”.

Si se continúa la iteración de acuerdo al método se alcanza el punto fijo con la precisión deseada.

Los resultados obtenidos están en la figura 2.

	A	B	C	D	E
1					
2		Método de Punto Fijo			
3					
4		f(x)=x*sen(x)-1		Intervalo	[0,2]
5		g(x)=x-f(x)			
6		n	pn	g(pn)	error
7		0	1	1,1585290	
8		1	1,1585290	1,0970677	0,158529
9		2	1,0970677	1,1208163	0,0614613
10		3	1,1208163	1,1115708	0,0237486
11		4	1,1115708	1,1151631	0,0092455
12		5	1,1151631	1,1137661	0,0035923
13		6	1,1137661	1,1143092	0,0013971
14		7	1,1143092	1,1140980	0,0005431
15		8	1,1140980	1,1141801	0,0002112
16		9	1,1141801	1,1141482	0,0000821
17		10	1,1141482	1,1141606	0,0000319
18		11	1,1141606	1,1141558	0,0000124
19		12	1,1141558	1,1141577	0,0000048
20		13	1,1141577	1,1141569	0,0000019
21		14	1,1141569	1,1141572	0,0000007
22					

Figura 2. Resolución mediante el Método de Punto Fijo

2.3. Método de Newton

Este método también es conocido como Método de Newton-Raphson. En este método la iteración consiste en tomar el punto p_{n+1} como el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto p_n .

El valor de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_n , viene dada por

$$y = f(x_n) + m(x - x_n) \quad (4)$$

dónde m es el valor de la pendiente de la recta, es decir la derivada de la función en el punto, $f'(x_n)$. Y como $y = 0$, pues es el corte con el eje OX, se tiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5)$$

Al igual que en el método anterior en este se parte de un valor p_0 . Con cada iteración el valor obtenido se aproxima más a la raíz buscada.

Por el teorema de Newton-Raphson, si la función f es continua y derivable en el intervalo $[a, b]$, si la función tiene una raíz p en el intervalo y si la derivada de la función es distinta de cero en el punto p , $f'(p) \neq 0$, entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ formada por los puntos

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})} \quad (6)$$

con $k = 1, 2, \dots$ converge a la raíz p cualquiera que sea la aproximación inicial, $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

A la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ se le denomina función de iteración de Newton-Raphson. Como $f(p) = 0 \Rightarrow g(p) = p$ (estamos en una iteración de punto fijo).

Si la función f y sus derivadas hasta el orden m son continuas en un intervalo centrado en la raíz p , se dice que $f(x) = 0$ tiene una raíz de orden m en el punto $x = p$ si se cumple que $f(p) = 0$, $f'(p) = 0$, $\dots$, $f^{(m-1)}(p) = 0$, $f^{(m)}(p) \neq 0$

En particular y de acuerdo al valor de m , se tiene

- Si $m = 1$, entonces la raíz se llama simple.
- Si $m = 2$, entonces la raíz se llama doble.
- Si $m > 1$, entonces la raíz se llama múltiple.

Sea la sucesión generada por el método, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a una raíz p de $f(x) = 0$. Si p es una raíz simple entonces la convergencia es cuadrática y el error para n suficientemente grande es

$$|E_{n+1}| \approx \frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|} |E_n|^2 \quad (7)$$

Si p es múltiple ($m > 1$) entonces la convergencia es lineal con error:

$$|E_{n+1}| \approx \frac{m-1}{m} |E_n| \quad (8)$$

El método de Newton tiene convergencia cuadrática para raíces simples. En cada iteración doblamos aproximadamente el número de decimales. Si la raíz es múltiple, el error en cada paso es una fracción del error del paso anterior.

Ejemplo 3.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método de Newton-Raphson. Búsquese la raíz en el intervalo $[0,2]$ con un error inferior a $1e-6$.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En este método lo primero que hay que hacer es hallar la derivada de la función:

$$f'(x) = \text{seno}(x) + x \cdot \cos(x)$$

Seguidamente en la hoja de cálculo Excel se va a generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango “B6:E6” los encabezados de las columnas, así “n” es el número de iteraciones; “pn” es el valor de p en cada nueva iteración, “f(p)” es el valor de la función en el punto “p”, “f'(p)” es el valor de la derivada de la función en el punto “p”, y finalmente “error” que contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Como este método necesita un punto inicial p_0 , se toma éste como el punto medio del intervalo, luego $p_0 = 1$, y por tanto introducimos este valor en la celda “C7”.

En la celda “D7” se introduce la fórmula para calcular $f(p_0)$, que viene dada por “=C7*SENO(C7)-1”, y en “E7” se introduce la fórmula para calcular $f'(p_0)$, que viene dada por “=SENO(C7)+(C7*COS(C7))”. Así, el primer punto calculado por el método se encuentra en “C8” y de acuerdo con la ecuación (6) tiene la fórmula “=C7-(D7/E7)”.

A partir de la primera iteración se puede calcular el error cometido mediante la fórmula “=ABS(C8-C7)”. Si se continúa la iteración de acuerdo al método se alcanza la solución con la precisión deseada. Los resultados obtenidos están en la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Método de Newton-Raphson					
3							
4		f(x)=x*sen(x)-1		Intervalo	[0,2]		
5							
6		n	pn	f(p)	f'(p)	error	
7		0	1	-0,1585290	1,381773291		
8		1	1,114728672	0,0007937	1,388741346	0,114728672	
9		2	1,114157127	0,0000000	1,388809383	0,000571546	
10		3	1,114157141	0,0000000	1,388809382	0,0000000	
11							

Figura 3. Resolución mediante el Método de Newton

Nótese en este método la rapidez de la convergencia frente a los métodos anteriores. Es por ello que es uno de los métodos más utilizados.

Sin embargo, este método presenta algunas dificultades tales como el tener que calcular la derivada de la función, o si esta tuviera valor 0. Esto obliga a seguir buscando e implementando nuevos métodos para resolver las ecuaciones no lineales.

2.4. Método de la Secante

Este método, al igual que el próximo que veremos el Método de la Régula Falsi, es un método de interpolación lineal basado en aproximar $f(x)$ por medio de una recta en la vecindad de la raíz.

En este método se parte de dos puntos iniciales, $(p_0, f(p_0)), (p_1, f(p_1))$ cercanos al punto $(p, 0)$, y definimos el nuevo punto p_2 , como el punto de la recta que une p_0 y p_1 que corta al eje OX.

A partir de la secante que une los tres puntos se obtiene que su pendiente es tomando puntos 2 a 2:

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}, \quad m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1} \quad (9)$$

Y partir de la ecuación (9) se tiene que

$$p_2 = g(p_1, p_0) = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} \quad (10)$$

Lo que da lugar generalizando al método de la secante

$$p_{k+1} = g(p_k, p_{k-1}) = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})} \quad (11)$$

El método de la Secante es una versión del Método de Newton en el que se sustituye el cálculo de la derivada por la fórmula de derivación numérica de 2 puntos. El método es casi tan rápido como el de Newton, siendo el orden de convergencia en una raíz simple de 1,618. Téngase en cuenta que si la aproximación inicial no es lo suficientemente cercana o si la raíz no es simple, este método no asegura la convergencia.

Ejemplo 4.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método de la Secante. Búsquese la raíz en el intervalo $[0,2]$ con un error inferior a $1e-6$.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En este método lo primero que hay que hacer es generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango “B6:E6” los encabezados de las columnas, así “k” es el número de iteraciones; “pk” es el valor de p en cada nueva iteración, y finalmente “error” que contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Como este método necesita dos puntos iniciales p_0 y p_1 se toman los extremos del intervalo, y se introducen en las celdas “C7” y “C8”. El primer punto calculado de acuerdo al método, p_2 , estará en la celda “C9” que contiene la fórmula del método, “=C8-((C8*SENO(C8)-1)*(C8-C7))/((C8*SENO(C8)-1)-(C7*SENO(C7)-1))”, y en “D9” se puede calcular el error cometido mediante la fórmula “=ABS(C9-C8)”.

Si se continúa la iteración de acuerdo al método se alcanza la solución con la precisión deseada.

Los resultados obtenidos están en la figura 4.

	A	B	C	D	E
1					
2		Método de la secante			
3					
4		f(x)=x*sen(x)-1		Intervalo	[0,2]
5					
6		k	pk	.	
7		0	0		
8		1	2	2,000000	
9		2	1,0997502	0,9002498	
10		3	1,1212407	0,0214906	
11		4	1,1141612	0,0070795	
12		5	1,1141571	0,0000041	
13		6	1,1141571	0,0000000	
14					
15					

Figura 4. Resolución mediante el Método de la Secante

2.5. Método de la Falsa Posición o *Régula Falsi*

El Método de la Falsa Posición o *Régula Falsi*, como ya se ha comentado es otra variante del Método de Newton, si bien su funcionamiento es también una generalización del Método de la Bisección de Bolzano, dónde en lugar de dividir el intervalo por la mitad, se toma un intervalo ponderado, teniendo en cuenta más información con respecto al valor de $f(x)$ en cada etapa.

Por el teorema del valor intermedio de Bolzano $\forall L \in [f(a), f(b)]$, $\exists c$ tal que $f(c) = L$, y en particular $f(c) = 0$. Luego, tenemos que

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad , \quad m = \frac{0 - f(b)}{c - b} \Rightarrow c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (12)$$

y por tanto en cada iteración se dan tres posibles casos.

- Si $f(c) = 0$, entonces c es la raíz buscada
- Si $f(a) * f(c) < 0$, se sigue buscando la raíz en el intervalo $[a, c]$.
- Si $f(c) * f(b) < 0$, se sigue buscando la raíz en el intervalo $[c, b]$.

El método de la Bisección y el de la Régula Falsi dependen de un intervalo inicial $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. No importa lo grande que sea el mismo. Se dice que son métodos globalmente convergentes. Nótese que si $f(x) = 0$ tiene varias raíces en $[a, b]$, deberemos encontrar un subintervalo de partida para cada raíz.

Ejemplo 5.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método de la Régula Falsi. Búsquese la raíz en el intervalo $[0, 2]$ con un error inferior a $1e-6$.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En este método lo primero que hay que hacer es generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango “B6:I6” los encabezados de las columnas, así “k” es el número de iteraciones; “ak” es el valor de a en cada nuevo subintervalo, “bk” es el valor de b en cada nuevo subintervalo, “ck” es el nuevo punto hallado en cada iteración, y que será finalmente el valor de la raíz, “f(a)” es el valor de la función en el punto “ak”, “f(b)” es el valor de la función en el punto “bk”, “f(c)” es el valor de la función en el punto “ck” y finalmente “|.” contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Se introducen los valores del problema y así en la celda “C7” se introduce el valor de a en el intervalo original es decir, 0 y en la celda “D7” se introduce el valor de b en el intervalo original, es decir, 2. En la celda “E7” se halla el nuevo punto calculado de c de acuerdo a la ecuación (12), y entonces se introduce la fórmula correspondiente “=D7-(G7*(D7-C7))/(G7-F7)”.

En las celdas “F7”, “G7” y “H7”, se introducen los valores calculados de $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$, mediante las fórmulas “=C7*SENO(C7)-1”, “=D7*SENO(D7)-1”, y “=E7*SENO(E7)-1”.

Una vez calculado el nuevo punto c y el valor $f(c)$, hay que comprobar en que caso de los tres posibles se está. Para ello en la celda “C8”, de la columna “ak” se introduce la siguiente fórmula “=SI(O(Y(F7>0;H7<0);Y(F7<0;H7>0));C7;E7)” que se corresponde con el segundo caso, es decir cuando $f(a) * f(c) < 0$. De forma análoga se introduce en la celda “D8”, de la columna “bk” la fórmula “=SI(O(Y(G7>0;H7<0);Y(G7<0;H7>0));D7;E7)” que se corresponde con el tercer caso, cuando $f(b) * f(c) < 0$. Y de esta forma queda confirmado el siguiente subintervalo.

Ahora en “I8” se puede calcular el error cometido mediante la fórmula “=ABS(C8-C7)”. Si se continúa la iteración de acuerdo al método se alcanza la solución con la precisión deseada. Los resultados obtenidos están en la figura 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Método de la Régula Falsi								
3										
4		f(x)=x*sen(x)-1		Intervalo	[0,2]					
5										
6		k	ak	bk	ck	f(a)	f(b)	f(c)	.	
7		0	0	2	1,0997502	-1,0000000	0,8186	-0,0200192		
8		1	1,09975017	2,0000000	1,1212407	-0,0200192	0,8186	0,0098346	0,0214906	
9		2	1,09975017	1,121241	1,1141612	-0,0200192	0,0098	0,0000056	0,0070795	
10		3	1,09975017	1,114161	1,1141571	-0,0200192	0,0000	0,0000000	0,0000041	
11		4	1,09975017	1,114157	1,1141571	-0,0200192	0,0000	0,0000000	0,0000000	
12										
13										

Figura 5. Resolución mediante el Método de la Régula Falsi

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES CON VBA

En esta sección se van a implementar mediante VBA (Visual Basic for Applications) algunos de los métodos vistos en la sección anterior de forma que se puedan hallar las soluciones de una ecuación no lineal de forma automática, sin más que definir el intervalo y los puntos de partida si fuera necesario.

Para cada uno de los métodos se especifica un procedimiento Sub, el cual va a leer la ecuación a resolver que está en la celda B1, los límites del intervalo que se encuentran en las celdas B2 y B3, y el criterio de parada que se encuentra en la celda “C4”, a partir de ahí se calculan los diversos puntos que van a ir generando las sucesiones de acuerdo a cada uno de los métodos. Para poder evaluar las funciones especificadas de forma automática mediante la función “Evaluate”, se ha de asignar el nombre “x” en la hoja de cálculo, lo cual se hace en la celda B2. Este valor se irá actualizando con cada uno de los valores calculados a partir de los puntos iniciales. A la vez se van calculando los errores de la aproximación obtenida. Una vez hallada cada una de las raíces, se muestra la solución, el error de aproximación y el número de iteraciones que han sido necesarias para alcanzarla. Se muestran a continuación los códigos para alguno de los procedimientos:

```
Sub Bolzano()  
' Halla la solución de una ecuación no lineal, en el intervalo  
' [a,b], utilizando el Método de la Bisección de Bolzano.  
' (c) Fº Javier Palencia, 12-IV-2015  
    ' Datos de entrada: función y límites del intervalo  
    ' Datos de salida: valor aproximado de la raíz y error  
    'Se asigna la función que define la ecuación  
    f = Range("B1").Formula  
    'Se asignan los límites del intervalo  
    a0 = Range("B2").Value  
    a = a0  
    b = Range("B3").Value  
    'Se asigna el error fijado como criterio de parada  
    errorn = Range("C4").Value  
    'Se inicializa el nº de iteraciones  
    niter = 0  
    'Se inicializa el error cometido  
    errorc = Abs(b - a)  
    While errorc >= errorn  
        'Se calcula el punto medio  
        c = (a + b) / 2  
        'Evaluamos la función en a, b y c  
        Cells(2, 2).Value = a  
        fa = Evaluate(f & "+x*0")  
        Cells(2, 2).Value = b  
        fb = Evaluate(f & "+x*0")  
        Cells(2, 2).Value = c  
        fc = Evaluate(f & "+x*0")  
        'Estudiamos en que parte del intervalo seguimos  
        If fa * fc < 0 Then  
            errorc = Abs(c - a)  
            b = c  
        Else  
            errorc = Abs(b - c)  
            a = c  
        End If  
        niter = niter + 1  
    'Escribimos los resultados en la hoja de cálculo
```

```

        Cells(6, 2).Value = c
        Cells(6, 3).Value = errorc
        Cells(6, 4).Value = niter
    Wend
    Cells(2, 2) = a0
End Sub

*****

Sub PtoFijo()
' Halla la solución de una ecuación no lineal, en el intervalo
' [a,b], utilizando el Método del Punto Fijo
' (c) Fº Javier Palencia, 12-IV-2015
    ' Datos de entrada: función y límites del intervalo
    ' Datos de salida: valor aproximado de la raíz y error
    'Se asigna la función que define la ecuación
    f = Range("B1").Formula
    'Se construye la función g
    g = "x-(" & f & ")"
    'Se asignan los límites del intervalo
    a0 = Range("B2").Value
    a = a0
    b = Range("B3").Value
    'Se asigna el error fijado como criterio de parada
    errorn = Range("C4").Value
    'Se inicializa el nº de iteraciones
    niter = 0
    'Se inicializa el error cometido
    errorc = Abs(b - a)
    'Se inicializa p0
    p = (a + b) / 2
    While errorc >= errorn
        'Evaluamos la función en p
        Cells(2, 2).Value = p
        gp = Evaluate(g & "+x*0")
        'Calculamos el error y actualizamos el valor de p
        errorc = Abs(gp - p)
        p = gp
        niter = niter + 1
    
```



```

        'Escribimos los resultados en la hoja de cálculo
        Cells(7, 2).Value = gp
        Cells(7, 3).Value = errorc
        Cells(7, 4).Value = niter
    Wend
    Cells(2, 2) = a0
End Sub
'*****

Sub NewtonRaphson()
' Halla la solución de una ecuación no lineal, en el intervalo
' [a,b],utilizando el Método de Newto-Raphson
' (c) Fº Javier Palencia, 12-IV-2015
    ' Datos de entrada: función y límites del intervalo
    ' Datos de salida: valor aproximado de la raíz y error
    Dim p1 As Double
    'Se asigna la función que define la ecuación
    f = Range("B1").Formula
    'Se asignan los límites del intervalo
    a0 = Range("B2").Value
    a = a0
    b = Range("B3").Value
    'Se asigna el error fijado como criterio de parada
    errorn = Range("C4").Value
    'Se inicializa el nº de iteraciones
    niter = 0
    'Se inicializa el error cometido
    errorc = Abs(b - a)
    'Se inicializa p1
    p1 = (a + b) / 2
    While errorc >= errorn
        'Evaluamos la función en p
        Cells(2, 2).Value = p1
        fp = Evaluate(f & "+x*0")
        'Hallamos el valor de la derivada en el punto
        dfp = DifCen4(Range("B1").Formula, p1, 0.001)
        'Calculamos el siguiente valor de la sucesión
        p2 = p1 - (fp / dfp)
    
```

```

errorc = Abs(p2 - p1)
p1 = p2
niter = niter + 1
'Escribimos los resultados en la hoja de cálculo
Cells(8, 2).Value = p2
Cells(8, 3).Value = errorc
Cells(8, 4).Value = niter
Wend
Cells(2, 2) = a0
End Sub

```

Los resultados obtenidos están en la figura 6.

	A	B	C	D
1	Función	$x \cdot \sin(x) - 1$		
2	a	0		
3	b	2		
4	Criterio de parada	$p_{k+1} - p_k$	1,00E-06	
5	Método	Solución	Error	Nº iteraciones
6	Método de Bolzano	1,1141577	0,00000095	21,00
7	Método del Punto Fijo	1,1141569	0,00000073	14,00
8	Método de Newton	1,1141571	0,00000001	3,00
9	Método de la Secante	1,1141571	0,00000000	5,00
10	Método de la Regula Falsi	1,1141571	0,00000000	5,00
11				

Figura 6. Resolución mediante programación VBA

4. CONCLUSIONES

Se ha podido comprobar que mediante la hoja de cálculo Excel es extremadamente sencillo encontrar soluciones numéricas aproximadas a ecuaciones no lineales en un intervalo dado $[a, b]$, si es que existen. El grado de exactitud de las aproximaciones obtenidas viene dado por los distintos métodos numéricos que se han utilizado, así como del criterio de parada utilizado.

Asimismo se prueba que con una sencilla implementación en VBA, se pueden hallar buenas aproximaciones a las soluciones de ecuaciones no lineales. La programación se ha realizado de forma que se pueda replicar fácilmente el programa para cualquier método. En todo momento se ha optado por generar programas que no dependan de la ecuación a resolver, sino que interpreten y evalúen cualquier función.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- M. Amelot, VBA Excel 2007, Ediciones ENI, (Barcelona, 2007)
- J.J Bernal García, Aportaciones para la mejora de la presentación grafica de datos cuantitativos en Excel, Revista Rect@. Vol. 16: 41242-412, XVI Congreso ASEPUMA y IV Encuentro Internacional. (Cartagena, 2008).
- J.J. Bernal García, Representación automática de funciones en Excel y su aplicación docente, Revista Rect@. Vol. 12, pp: 141 a 157. (2011)
- R. Burden, J. Faires, Análisis numerico (7ª ed.), Thomson Learning, (México, 2002)
- C.F. Gerald, P.O. Wheatley, Análisis numerico con aplicaciones (6ª ed.), Pearson Prentice-Hall, (México, 2000)
- R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards, Cálculo I (7ª ed), Pirámide (Madrid, 2005)
- J. H. Mathews, K.D. Fink, Métodos numéricos con Matlab (3ª ed.), Pearson Prentice-Hall, (Madrid, 2000).
- F. J. Palencia González, Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel, Revista Recta@- Monográfico nº 4, pp: 57 a 82. (2013)
- F. J. Palencia González, J. Rodríguez Ruiz, M.C. García Llamas, Resolución de integrales definidas con Excel, Revista Anales de Asepuma nº 22. (2014)
- Shoichiro Nakamura, Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab, Pearson Prentice-Hall, (México, 1997)
- J. Walkenbach, Excel 2010.Programación con VBA, Anaya Multimedia-Wiley (Madrid, 2011)