

Análisis comparativo de tres distribuciones trapezoidales

Herrerías Velasco, José Manuel <jmherrer@ugr.es>
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada

Callejón Céspedes, José <callejon@ugr.es>
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada

Herrerías Pleguezuelo, Rafael <rherrer@ugr.es>
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada

RESUMEN

Partiendo de la distribución de probabilidad trapezoidal $T_p(A, M_1, M_2, B)$, usada como modelo probabilístico en muchos y variados problemas reales, y utilizando las tres típicas estimaciones subjetivas del método PERT, sobre los valores mínimo, máximo y más probable del campo de variación de una variable objeto de estudio, se han determinado, de forma alternativa, tres distribuciones trapezoidales ligeramente diferentes: Callejón, Pérez y Ramos (1996), Vivo y Franco (2006), y Herrerías y Herrerías (2009).

El objetivo principal de este trabajo, es realizar un análisis comparativo entre estas tres distribuciones, utilizando sus características estocásticas, para seleccionar la que mejor se ajuste al problema real planteado: predicción de la duración de un trabajo, selección de la inversión más rentable, valoración de un activo, etc.

Posteriormente, se destacan algunas de las peculiaridades de estas distribuciones que pueden resultar ventajosas en comparación con algunas distribuciones que han sido utilizadas, como modelos probabilísticos en el método PERT, tales como la distribución triangular y la distribución beta.

ABSTRACT

On the basis of trapezoidal probability distribution $Tp(A, M1, M2, B)$, used as a model in many and varied probabilistic problems, and using the three typical subjective estimates of the PERT method, about minimum, maximum, and most likely values of a variable, there are determined three different trapezoidal distributions: Callejón, Pérez y Ramos (1996), Vivo y Franco (2006), y Herrerías y Herrerías (2009).

The main objective of this work is to make a comparative analysis between these three distributions, using its stochastic characteristics, to select which best suits the real problem: prediction of the duration of a work, selection of the most profitable investment, valuation of an asset, etc.

Subsequently, highlights some of the peculiarities of these distributions that can be an advantage in comparison with some distributions that have been used, such as probabilistic models in the PERT method, such as the triangular distribution and the beta distribution.

Palabras claves: Estimación subjetiva; Método PERT; ambiente de incertidumbre; distribución trapezoidal.

Área temática: A4-Métodos cuantitativos e informáticos.

1. INTRODUCCION

La distribución trapezoidal pertenece a un amplio grupo de distribuciones de probabilidad continuas univariantes, tales que la representación gráfica de su función de densidad es una figura geométrica determinada: rectángulo, triángulo, trapecio, parábola, etc., de la que se deriva la denominación de la propia distribución: rectangular, triangular, trapezoidal, parabólica, etc.

Esta distribución ha sido utilizada, como modelo probabilístico, en muy diferentes campos científicos: análisis de inversiones, Herrerías y Calvete (1987), valoración de activos, Herrerías, García, Cruz y Herrerías (2001), conjuntos borrosos, Kaufman y Gil Aluja (1986), control educativo, Akcayol, Elmas, Erden y Kart (2004). etc., y generalmente está relacionada con la incertidumbre de los datos disponibles en tales campos. Por ello, en los últimos años, se han publicado varios trabajos con el objetivo principal de especificar una distribución trapezoidal tetraparamétrica, $T_p(A, M_1, M_2, B)$, a partir de las tres típicas estimaciones subjetivas del método PERT, sobre los valores pesimista, optimista y más probable. En esta línea de trabajo se enmarcan los artículos de Callejón, Pérez y Ramos (1996), Franco y Vivo (2006), y Herrerías y Herrerías (2009).

Según Kotz y van Dorp (2004), un primer antecedente en el uso de la distribución trapezoidal es el de Poulisquen (1970), relativo a un análisis del riesgo en un proyecto de valoración. El interés, en esta última década, por el estudio de esta distribución es creciente, véase van Dorp, Cruz, García y Herrerías (2007) y la generalización de la distribución trapezoidal introducida por van Dorp y Kotz (2003).

En España, Herrerías y Calvete (1987) la utilizan como modelo probabilístico para los flujos de caja de una inversión, dos años más tarde, Herrerías y Miguel (1989), determinan una expresión más sencilla para su varianza, que es la comúnmente usada en los trabajos de Callejón, Pérez y Ramos (1996), Franco y Vivo (2006), y Herrerías y Herrerías (2009).

Centrándonos en el presente trabajo, debe decirse que su objetivo principal es la comparación de las tres diferentes distribuciones trapezoidales presentadas por Callejón, Pérez y Ramos (1996), por Vivo y Franco (2006) y por Herrerías y Herrerías (2009).

Éstas han sido especificadas a partir de los tres valores de la metodología PERT: menor (A), modal (M) y mayor (B). Este estudio comparativo permitirá averiguar cuál de los tres modelos probabilísticos trapezoidales es mejor o más adecuado en la aplicación a un problema real.

Como algunas de las aplicaciones de las distribuciones trapezoidales están relacionadas con el Análisis de Inversiones, con la estimación del tiempo a emplear en un trabajo complejo, con los métodos de Valoración, etc., se debe atender al análisis comparativo de sus medias y varianzas para determinar en que tramos un modelo es más moderado que los otros, ó menos incierto en la especificación del intervalo modal, ó más (menos) conservador en sus conclusiones debido a su mayor (menor) varianza. Estas cualidades de moderación, incertidumbre del intervalo modal y conservadurismo ó poca aversión al riesgo, se cuantifican con la media, con la longitud del intervalo modal y con la varianza respectivamente. Por otra parte, como siempre que se producen comparaciones pareadas de medias y varianzas, es conveniente estudiar el Coeficiente de Variación de Pearson, CV, para dilucidar que distribución es la más favorable. Sobre todo en aquellos casos donde no hay una distribución favorita para los dos criterios de media y varianza.

El trabajo se estructura de la siguiente forma: en el punto 2 se resume la clásica distribución Trapezoidal estandarizada, esto es, el recorrido de la variable (A, B) se reduce al intervalo (0,1), junto con sus principales características estocásticas. En el punto 3 se presentan las tres distribuciones trapezoidales que van a confrontarse. El punto 4, se dedica a realizar el análisis comparativo de las tres distribuciones, mediante el estudio de las longitudes de los intervalos modales y sus características estocásticas: media, varianza y coeficiente de variación. Finalmente, en el punto 5 se recopilan las principales conclusiones del trabajo.

2. LA DISTRIBUCIÓN TRAPEZOIDAL

La distribución trapezoidal $T_p(A, M_1, M_2, B)$ responde a la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} K \frac{x-A}{M_1-A} & \text{si } A < x \leq M_1 \\ K & \text{si } M_1 \leq x \leq M_2 \\ K \frac{B-x}{B-M_2} & \text{si } M_2 \leq x < B \end{cases} \quad (1)$$

donde $K = 2(B-A+M_2-M_1)^{-1}$ juega el papel de constante normalizadora.

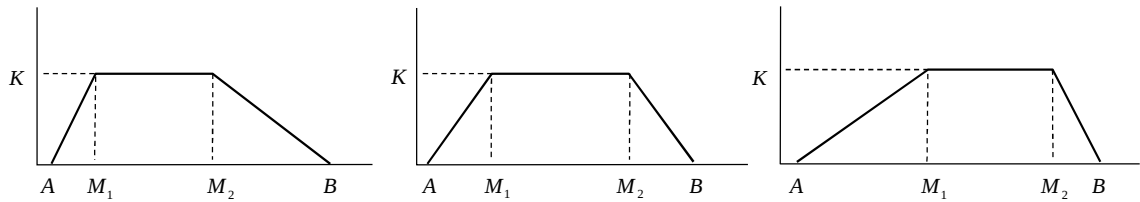


Figura 1: Distribución trapezoidal simétrica y con asimetría a la derecha e izquierda

Por comodidad de cálculo es conveniente estandarizar el recorrido (A, B) de la variable X, mediante el cambio de variable lineal:

$$Z = \frac{X-A}{B-A} \quad (2)$$

al intervalo (0, 1), resultando que esta nueva variable estandarizada tiene una función de densidad:

$$f(z) = \begin{cases} k \frac{z}{m_1} & \text{si } 0 < z \leq m_1 \\ k & \text{si } m_1 \leq z \leq m_2 \\ k \frac{1-z}{1-m_2} & \text{si } m_2 \leq z < 1 \end{cases} \quad (3)$$

donde se ha notado por m_i ($i=1, 2$), los valores estandarizados de M_i ($i=1, 2$), y por $k = 2(1+m_2-m_1)^{-1}$ a la constante normalizadora resultantes del cambio de variable visto en (2).

De (1) y (3) se deducen las respectivas funciones de distribución de las variables aleatorias ordinaria (X) y estandarizada (Z), que pueden consultarse en Herrerías, Palacios y Callejón (2012).

Mediante (4) se obtienen los momentos centrados respecto al origen para la distribución trapezoidal estandarizada:

$$\alpha_n = E[Z^n] = \frac{k}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{1-m_2^{n+2}}{1-m_2} - m_1^{n+1} \right] \quad (4)$$

$$\text{Para } n=1: \quad \alpha_1 = E[Z] = \frac{1}{3} \left(\frac{m_2^2 + m_2 + 1 - m_1^2}{1 + m_2 - m_1} \right) \quad (5)$$

$$\text{Para } n=2: \quad \alpha_2 = E[Z^2] = \frac{m_2^3 + m_2^2 + m_2 + 1 - m_1^3}{6(1 + m_2 - m_1)} \quad (6)$$

Por lo que la varianza de la variable estandarizada es:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{18} [1 + m_1^2 + m_2^2 - (1 + m_2)m_1] - \frac{1}{9} \frac{(m_2 - m_1)m_2(1 - m_1)}{(1 + m_2 - m_1)^2} \quad (7)$$

expresión que coincide con la obtenida por Herrerías y Miguel (1989).

3. DISTRIBUCIONES TRAPEZOIDALES REPARAMETRIZADAS

3.1. La distribución Trapezoidal CPR

La distribución trapezoidal CPR fue introducida por Callejón, Pérez y Ramos (1996). Estos autores, a partir de los tres típicos valores “A”, “M” y “B” del método PERT, considerando la asimetría de la distribución, de acuerdo a que “M” sea menor o mayor que el punto central del intervalo (A, B), $C = (A + B)/2$, determinando los extremos inferior y superior del intervalo modal de la distribución trapezoidal mediante:

- $M_1 = C$ y $M_2 = M$, si $C < M$, o bien
- $M_1 = M$ y $M_2 = C$, si $C > M$ (8)

Nótese que el punto medio del intervalo modal en la distribución trapezoidal CPR es $(M + C)/2$, luego no coincide con M , salvo que $M = C$.

Aplicando sobre (8) el cambio de variable visto en (2) se tiene:

- $m_1 = c$ y $m_2 = m$, si $c = 0,5 < m$, o bien
- $m_1 = m$ y $m_2 = c$, si $c = 0,5 > m$ (9)

En tal caso, el punto medio del intervalo modal en la distribución trapezoidal CPR estandarizada es $(2m+1)/4$, que tampoco coincide con m , salvo que m sea 0,5.

3.2. La distribución Trapezoidal VF

Vivo y Franco (2006) establecen que una variable aleatoria $Tp(A, M_1, M_2, B)$ puede representarse de forma equivalente mediante $Tp(A, M, W, B)$, donde M representa el punto medio del intervalo modal, $M = (M_1 + M_2)/2$, y W la mitad de su amplitud, $W = (M_2 - M_1)/2$. Finalmente suponen que $M_1 = M - W$ y $M_2 = M + W$.

A partir de los tres típicos valores “A”, “M” y “B” del método PERT, denotando por $C = (A + B)/2$ al punto central del intervalo (A, B), determinan los extremos inferior y superior del intervalo modal de la distribución trapezoidal:

$$\begin{aligned}
 & \begin{aligned}
 & - \begin{aligned}
 & M_1 = A \\
 & M_2 = 2M - A
 \end{aligned} & si & A < M \leq (4A + B)/5 \\
 & - \begin{aligned}
 & M_1 = (5M - A - B)/3 \\
 & M_2 = (A + B + M)/3
 \end{aligned} & si & (4A + B)/5 < M < C \\
 & - \begin{aligned}
 & M_1 = (A + B + M)/3 \\
 & M_2 = (5M - A - B)/3
 \end{aligned} & si & C < M < (A + 4B)/5 \\
 & - \begin{aligned}
 & M_1 = 2M - B \\
 & M_2 = B
 \end{aligned} & si & (A + 4B)/5 \leq M < B
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Nótese que la distribución trapezoidal propuesta en (10) tiene como punto medio del intervalo modal, (M_1, M_2) , al propio valor de M , es decir, la distribución trapezoidal obtenida por (10) centra el valor modal suministrado por el experto.

Aplicando sobre (10) el cambio de variable visto en (2) se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{aligned}
 & - \begin{aligned}
 & m_1 = 0 \\
 & m_2 = 2m
 \end{aligned} & si & m \leq 1/5 \\
 & - \begin{aligned}
 & m_1 = (5m - 1)/3 \\
 & m_2 = (1 + m)/3
 \end{aligned} & si & m \in]1/5, 1/2[\\
 & - \begin{aligned}
 & m_1 = (1 + m)/3 \\
 & m_2 = (5m - 1)/3
 \end{aligned} & si & m \in]1/2, 4/5[\\
 & - \begin{aligned}
 & m_1 = 2m - 1 \\
 & m_2 = 1
 \end{aligned} & si & m \geq 4/5
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Al igual que la distribución trapezoidal propuesta en (10), la distribución trapezoidal estandarizada propuesta en (11) tiene como punto medio del intervalo modal, (m_1, m_2) , el valor de m .

3.3. La distribución Trapezoidal HH

Con la misma información de partida: “A”, “M” y “B”, Herrerías y Herrerías (2009) determinan, en principio, los extremos superior e inferior del intervalo modal de la distribución trapezoidal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & - M_1 = M - (B - M)/2 \text{ y } M_2 = M + (B - M)/2 \text{ si } C < M \\ & - M_1 = M - (M - A)/2 \text{ y } M_2 = M + (M - A)/2 \text{ si } C > M \end{aligned} \quad (12)$$

Siendo $C = (A + B)/2$ el punto central del intervalo (A, B)

Herrerías y Herrerías (2009) proponen determinar el intervalo (M_1, M_2) de la distribución trapezoidal, $Tp(A, M_1, M_2, B)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & - \begin{aligned} M_1 &= M - (M - A)/2 \\ M_2 &= M + (M - A)/2 \end{aligned} \quad \text{si } M < (3A + B)/4 \\ & - \begin{aligned} M_1 &= (3M - C)/2 \\ M_2 &= (M + C)/2 \end{aligned} \quad \text{si } M \in [(3A + B)/4, C] \\ & - \begin{aligned} M_1 &= (M + C)/2 \\ M_2 &= (3M - C)/2 \end{aligned} \quad \text{si } M \in [C, (3B + A)/4] \\ & - \begin{aligned} M_1 &= M - (B - M)/2 \\ M_2 &= M + (B - M)/2 \end{aligned} \quad \text{si } M > (3B + A)/4 \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que la distribución trapezoidal propuesta en (13) tiene como punto medio del intervalo modal, (M_1, M_2) , al propio valor de M , es decir, la distribución trapezoidal obtenida por (13) centra el valor modal suministrado por el experto.

A partir de (2), se tiene que (12) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & - m_1 = (3m - 1)/2 \text{ y } m_2 = (m + 1)/2 \text{ si } c = 0,5 < m \\ & - m_1 = m/2 \text{ y } m_2 = 3m/2 \text{ si } c = 0,5 > m \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicando la estandarización vista en (2) sobre el resultado (13) se obtiene la propuesta para determinar una distribución trapezoidal estandarizada, $Tp(0, m_1, m_2, 1)$:

$$\begin{aligned}
 & - \begin{matrix} m_1 = m/2 \\ m_2 = 3m/2 \end{matrix} \quad \text{si } m < 1/4 \\
 & - \begin{matrix} m_1 = (6m-1)/4 \\ m_2 = (2m+1)/4 \end{matrix} \quad \text{si } m \in [1/4, 1/2] \\
 & - \begin{matrix} m_1 = (2m+1)/4 \\ m_2 = (6m-1)/4 \end{matrix} \quad \text{si } m \in [1/2, 3/4] \\
 & - \begin{matrix} m_1 = (3m-1)/2 \\ m_2 = (m+1)/2 \end{matrix} \quad \text{si } m > 3/4
 \end{aligned} \tag{15}$$

Al igual que la distribución trapezoidal propuesta en (13), la distribución trapezoidal estandarizada propuesta en (15) tiene como punto medio del intervalo modal, (m_1, m_2) , el valor de m .

4. ANÁLISIS COMPARATIVOS DE LAS TRES DISTRIBUCIONES

4.1. Análisis de las longitudes del intervalo modal

En este apartado se comparan las longitudes de los intervalos modales estandarizados de las tres distribuciones Trapezoidales. Sus longitudes son:

- Distribución Trapezoidal CPR:

$$\begin{cases} 1/2 - m & \text{si } 0 < m \leq 1/2 \\ m - 1/2 & \text{si } 1/2 < m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal VF:

$$\begin{cases} 2m & \text{si } 0 < m \leq 1/5 \\ 2/3(1-2m) & \text{si } 1/5 < m \leq 1/2 \\ 2/3(2m-1) & \text{si } 1/2 < m < 4/5 \\ 2(1-m) & \text{si } 4/5 \leq m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal HH:

$$\begin{cases} m & \text{si } 0 < m \leq 1/4 \\ 1/2 - m & \text{si } 1/4 < m \leq 1/2 \\ m - 1/2 & \text{si } 1/2 < m < 3/4 \\ 1 - m & \text{si } 3/4 \leq m < 1 \end{cases}$$

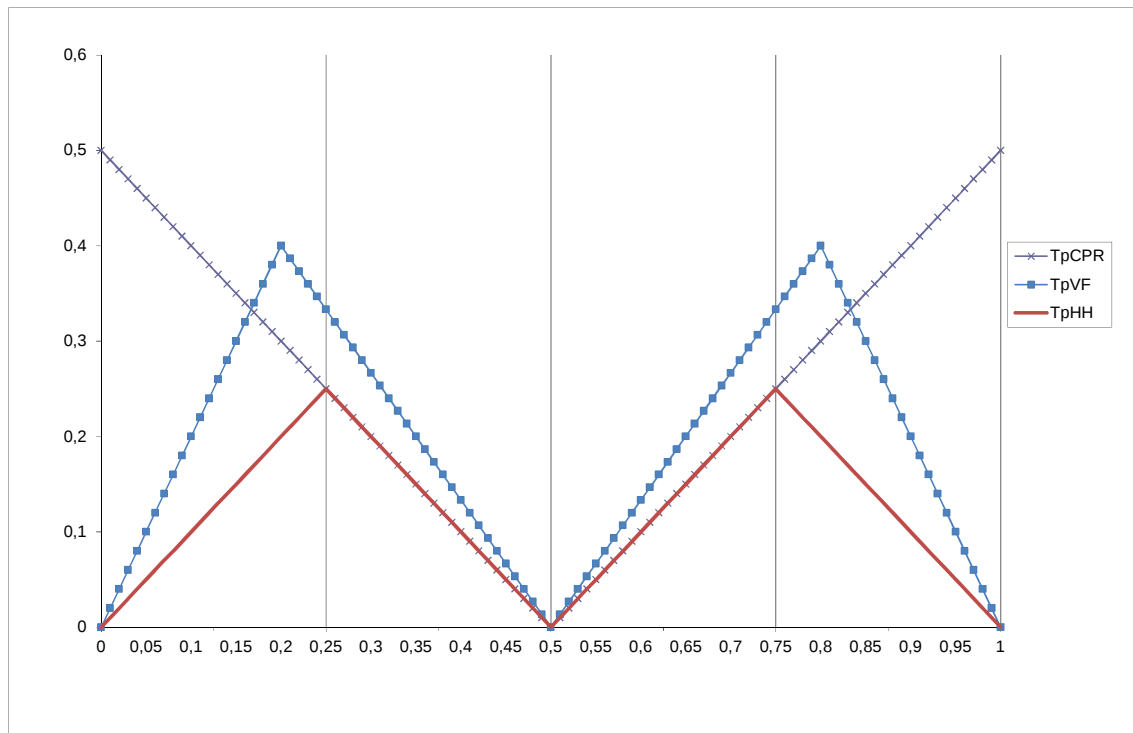


Gráfico 1: Representación de las longitudes de los intervalos modales

Comparando las longitudes de los intervalos modales de las distribuciones Trapezoidales estandarizadas, véase gráfico 1, se tiene que:

- Cuando $0 < m < 1/6$ ó $5/6 < m < 1$, la distribución que presenta un intervalo modal con menor longitud es la distribución TpHH, seguida de la TpVF y por último la TpCPR.
- Cuando $m = 1/6$ ó $m = 5/6$, coinciden las longitudes de los intervalos modales de las distribuciones TpCPR y TpVF. Aunque la distribución TpHH sigue presentando el intervalo modal con menor longitud.
- Cuando $1/6 < m < 1/4$ ó $3/4 < m < 5/6$, la distribución que presenta un intervalo modal con menor longitud es la distribución TpHH, seguida ahora de la TpCPR y por último la TpVF.

- d) Cuando $1/4 \leq m < 1/2$ ó $1/2 < m \leq 3/4$, coinciden las longitudes de los intervalos modales de las distribuciones TpCPR y TpHH, siendo menor que la que presenta la distribución TpVF.
- e) Cuando $m = 1/2$, la longitud de los intervalos modales de las tres distribuciones: TpCPR, TpVF y TpHH es nula, ya que dichas distribuciones trapezoidales degeneran o se transforman en distribuciones triangulares.
- f) Cuando $m = 0$ ó $m = 1$ la longitud de los intervalos modales de las distribuciones TpVF y TpHH es nula, mientras que la de la distribución TpCPR es igual a 0,5.

4.2. Análisis de las medias

A partir de (5) se obtienen las expresiones de las medias estandarizadas para cada una de las tres distribuciones Trapezoidales, siendo:

- Distribución Trapezoidal CPR:

$$\mu_{TpCPR} = \begin{cases} \frac{7 - 4m^2}{6(3 - 2m)} & \text{si } 0 < m \leq 1/2 \\ \frac{4m^2 + 4m + 3}{6(1 + 2m)} & \text{si } 1/2 < m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal VF:

$$\mu_{TpFV} = \begin{cases} \frac{4m^2 + 2m + 1}{3(2m + 1)} & \text{si } 0 < m \leq 1/5 \\ \frac{5m - 8m^2 + 4}{3(5 - 4m)} & \text{si } 1/5 < m \leq 1/2 \\ \frac{8m^2 + m + 2}{3(1 + 4m)} & \text{si } 1/2 < m < 4/5 \\ \frac{4m - 4m^2 + 2}{3(3 - 2m)} & \text{si } 4/5 \leq m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal HH:

$$\mu_{TpHH} = \begin{cases} \frac{4m^2 + 3m + 2}{6(m+1)} & \text{si } 0 < m \leq 1/4 \\ \frac{6m - 8m^2 + 5}{6(3-2m)} & \text{si } 1/4 < m \leq 1/2 \\ \frac{8m^2 + 2m + 3}{6(1+2m)} & \text{si } 1/2 < m < 3/4 \\ \frac{5m - 4m^2 + 3}{6(2-m)} & \text{si } 3/4 \leq m < 1 \end{cases}$$

Comparando las medias estandarizadas de las tres distribuciones trapezoidales, véase gráfico 2, se tiene que:

- Cuando $m = 0$, se comprueba que $\mu_{TpCPR} > \mu_{TpHH} = \mu_{TpVF}$
- Cuando $0 < m < 1/2$, es fácil comprobar que $\mu_{TpCPR} > \mu_{TpHH} > \mu_{TpVF}$
- Cuando $m = 1/2$, se comprueba que $\mu_{TpHH} = \mu_{TpVF} = \mu_{TpCPR}$, como era de esperar.
- Cuando $1/2 < m < 1$, se comprueba que $\mu_{TpCPR} < \mu_{TpHH} < \mu_{TpVF}$
- Cuando $m = 1$, se comprueba que $\mu_{TpCPR} < \mu_{TpHH} = \mu_{TpVF}$

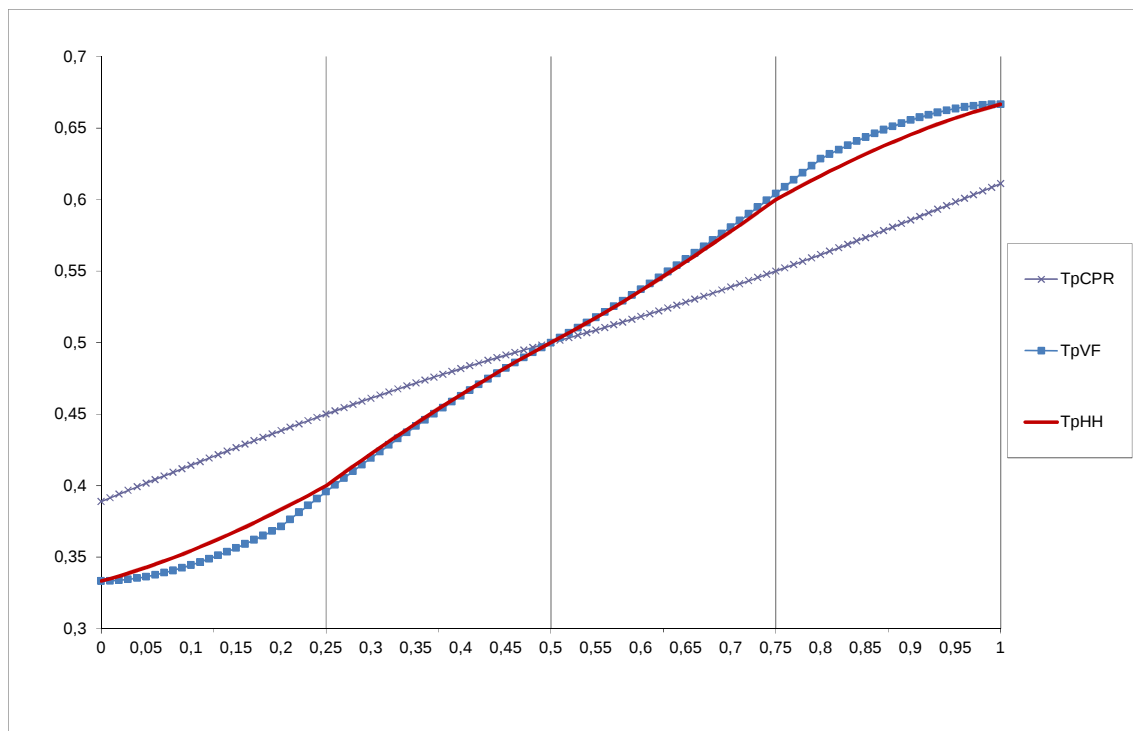


Gráfico 2: Medias de las distribuciones trapezoidales reparametrizadas

4.3. Análisis de las varianzas

En este apartado, a partir de (7) se obtienen las expresiones de las varianzas estandarizadas para cada una de las tres distribuciones Trapezoidales.

- Distribución Trapezoidal CPR:

$$\sigma_{\text{TpCPR}}^2 = \begin{cases} \frac{37 - 90m + 112m^2 - 72m^3 + 16m^4}{72(3-2m)^2} & \text{si } 0 < m \leq 1/2 \\ \frac{3 + 18m - 8m^2 + 8m^3 + 16m^4}{72(1+2m)^2} & \text{si } 1/2 < m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal VF:

$$\sigma_{\text{TpVF}}^2 = \begin{cases} \frac{1 + 4m + 16m^3 + 16m^4}{18(1+2m)^2} & \text{si } 0 < m \leq 1/5 \\ \frac{109 - 389m + 627m^2 - 464m^3 + 112m^4}{54(5-4m)^2} & \text{si } 1/5 < m \leq 1/2 \\ \frac{-5 + 79m - 93m^2 + 16m^3 + 112m^4}{54(1+4m)^2} & \text{si } 1/2 < m < 4/5 \\ \frac{37 - 116m + 114m^2 - 80m^3 + 16m^4}{18(3-2m)^2} & \text{si } 4/5 \leq m < 1 \end{cases}$$

- Distribución Trapezoidal HH:

$$\sigma_{\text{TpHH}}^2 = \begin{cases} \frac{4 + 6m - 5m^2 + 18m^3 + 7m^4}{72(1+m)^2} & \text{si } 0 < m \leq 1/4 \\ \frac{187 - 576m + 856m^2 - 576m^3 + 112m^4}{288(3-2m)^2} & \text{si } 1/4 < m \leq 1/2 \\ \frac{3 + 144m - 200m^2 + 128m^3 + 112m^4}{288(1+2m)^2} & \text{si } 1/2 < m < 3/4 \\ \frac{30 - 78m + 91m^2 - 46m^3 + 7m^4}{72(2-m)^2} & \text{si } 3/4 \leq m < 1 \end{cases}$$

Comparando las varianzas estandarizadas de las tres distribuciones trapezoidales, véase gráfico 3, se tiene que:

a) Cuando $m = 0$ ó $m = 1$, se comprueba que $\sigma_{\text{TpCPR}}^2 > \sigma_{\text{TpVF}}^2 = \sigma_{\text{TpHH}}^2$

b) Cuando $0 < m < 0,027491837$ ó $0,97250816 < m < 1$, es fácil comprobar que

$$\sigma_{\text{TpCPR}}^2 > \sigma_{\text{TpVF}}^2 > \sigma_{\text{TpHH}}^2$$

c) Cuando $m = 0,027491837$ ó $m = 0,97250816$, se comprueba que

$$\sigma_{TpCPR}^2 = \sigma_{TpVF}^2 > \sigma_{TpHH}^2$$

d) Cuando $0,027491837 < m < 0,0532785$ ó $0,9467215 < m < 0,97250816$, es fácil

$$\text{comprobar que } \sigma_{TpVF}^2 > \sigma_{TpCPR}^2 > \sigma_{TpHH}^2$$

e) Cuando $m = 0,0532785$ ó $m = 0,9467215$, se comprueba que $\sigma_{TpVF}^2 > \sigma_{TpCPR}^2 = \sigma_{TpHH}^2$

f) Cuando $0,0532785 < m < 1/2$ ó $1/2 < m < 0,9467215$, se comprueba que

$$\sigma_{TpVF}^2 > \sigma_{TpHH}^2 > \sigma_{TpCPR}^2$$

g) Cuando $m = 1/2$, se comprueba que $\sigma_{TpCPR}^2 = \sigma_{TpVF}^2 = \sigma_{TpHH}^2$, como era de esperar.

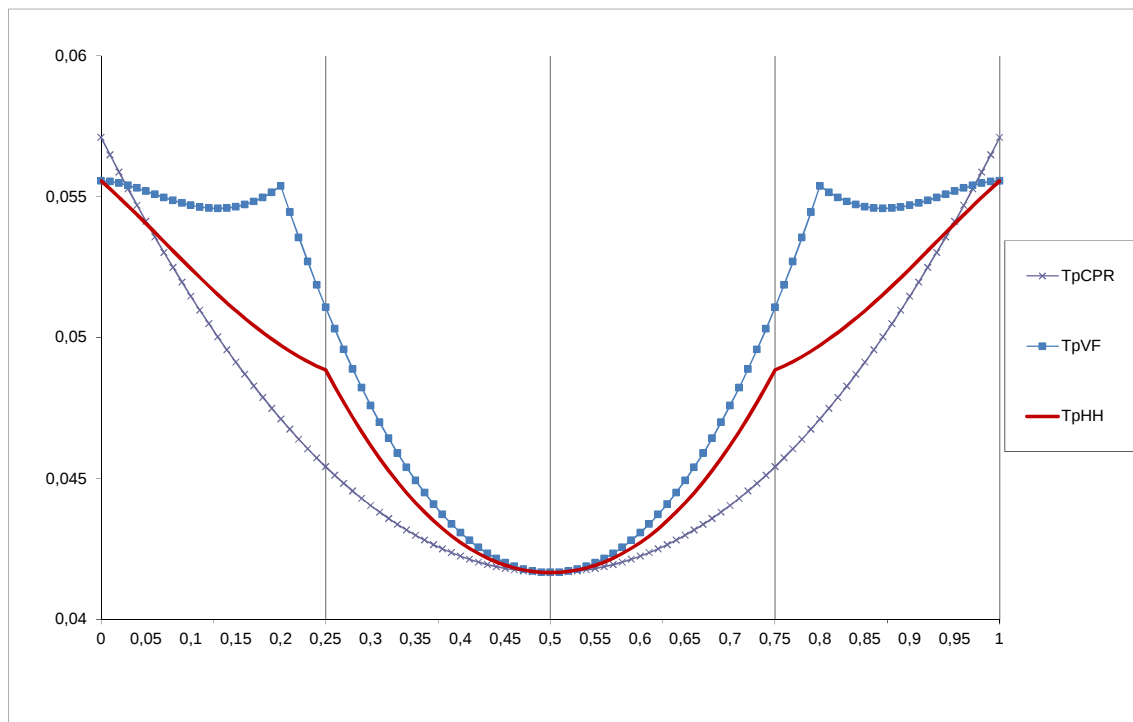


Gráfico 3: Varianzas de las distribuciones trapezoidales reparametrizadas

4.4. Análisis de los coeficientes de variación

En este apartado, a partir de los valores de las desviaciones típicas y las medias de las tres distribuciones trapezoidales estudiadas se obtienen los correspondientes valores de los Coeficientes de Variación para los diferentes valores de m . Entendiendo que la distribución con menor Coeficiente de Variación es la distribución más adecuada,

ya que es la que se comporta más homogéneamente, o mejor, bajo el doble criterio de media y varianza.

Comparando los valores de los coeficientes de variación de las tres distribuciones trapezoidales, véase gráfico 4, se tiene que:

- a) Cuando $m = 0$, se comprueba que $CV_{TpCPR} < CV_{TpVF} = CV_{TpHH}$
- b) Cuando $0 < m < 1/2$, es fácil comprobar que $CV_{TpCPR} < CV_{TpHH} < CV_{TpVF}$
- c) Cuando $m = 1/2$, se comprueba que $CV_{TpCPR} = CV_{TpVF} = CV_{TpHH}$, como era de esperar.
- d) Cuando $1/2 < m < 1$, es fácil comprobar que $CV_{TpCPR} > CV_{TpVF} > CV_{TpHH}$
- e) Cuando $m = 1$, se comprueba que $CV_{TpCPR} > CV_{TpVF} = CV_{TpHH}$

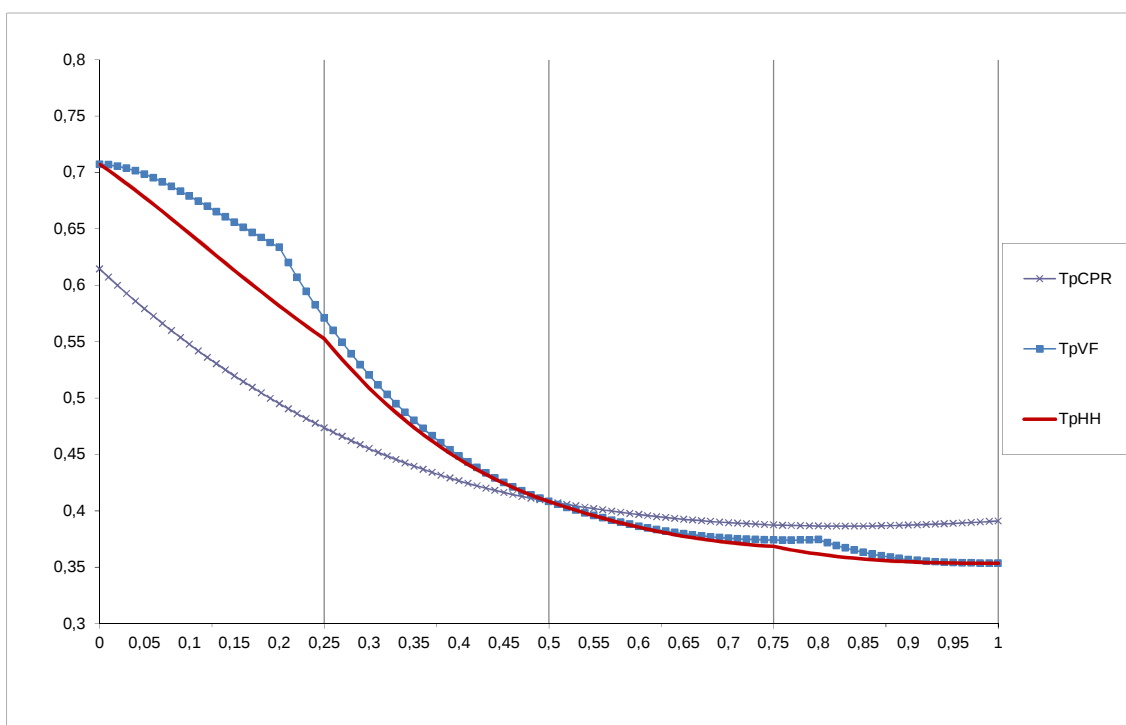


Gráfico 4: Coeficiente de variación de las distribuciones trapezoidales reparametrizadas

5. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo pueden deducirse las siguientes conclusiones:

1. Por centrar el valor modal del experto, las distribuciones Trapezoidal VF y Trapezoidal HH son preferidas a la distribución Trapezoidal CPR que no centra dicho valor.
2. Es claro que, para minimizar la incertidumbre del valor modal m serán preferibles los intervalos modales de menor longitud. Del gráfico 1 se concluye claramente, que la distribución Trapezoidal HH es la que verifica dicha propiedad. Salvo para los valores degenerativos de m : 0, $1/2$ y 1.
3. Debe destacarse que para los valores de m más centrados, esto es, los comprendidos entre $1/4$ y $3/4$, la longitud de los intervalos modales de las distribuciones Trapezoidal CPR y Trapezoidal HH coinciden.
4. Como puede verse en el gráfico 2, las gráficas de las medias estandarizadas de las tres distribuciones trapezoidales son crecientes. Esto mismo ocurre con las medias estandarizadas de otras distribuciones usadas en el método PERT como son:
 - la distribución Triangular, $\mu_T = (1+m)/3$
 - la distribución Beta PERT, $\mu_{BP} = (1+4m)/6$
5. Las representaciones gráficas de las medias de estas distribuciones pueden verse en Herrerías y Herrerías (2009) y se puede observar que la distribución menos moderada es la distribución Beta PERT ya que es la que presenta mayores oscilaciones, que van desde $1/6$ a $5/6$. Por el contrario, la distribución más moderada es la distribución Uniforme, que presenta una media constante e igual a $1/2$.
6. Centrándonos en las tres distribuciones trapezoidales a las que se hace referencia en este trabajo, concluimos que la más moderada es la Trapezoidal CPR, seguida de la Trapezoidal HH y la menos moderada es la Trapezoidal VF.
7. Atendiendo al gráfico 3, puede notarse que las gráficas de las varianzas de las tres distribuciones trapezoidales son de tipo parabólico. Al igual que ocurre con la varianza estandarizada de la distribución Triangular, $\sigma_T^2 = (m^2 - m + 1)/18$, y al contrario de lo que sucede con las distribuciones Beta PERT y Uniforme, que tienen varianzas constantes. Sus representaciones gráficas pueden verse en Herrerías y Herrerías (2009).

8. De la misma forma puede comprobarse fácilmente que, en cualquier caso, la varianza de la distribución Beta PERT, $\sigma_{BP}^2 = 1/36$, es menor que cualquiera de las varianzas de las distribuciones utilizadas en este trabajo, y la varianza de la distribución Uniforme, $\sigma_U^2 = 1/12$, es mayor que cualquiera de ellas.
9. Desde un punto de vista conservador o de aversión al riesgo, el hecho de tener mayor varianza hace que una distribución sea preferida a otra, ya que se evitan los resultados excesivamente optimistas en las decisiones empresariales, véase Suárez (2007). Por ello, la distribución Trapezoidal VF es la preferida en el amplio intervalo para $m \in (0,027491837; 0,97250816)$ y sólo fuera de él, la distribución Trapezoidal CPR tiene una varianza mayor, por lo que será favorita en las aplicaciones.
10. Debido a la falta de acuerdo unánime sobre la bondad de una distribución, usando los criterios de media y varianza, se hace imprescindible el estudio de los coeficientes de variación de estas tres distribuciones. Del gráfico 4 y de los resultados señalados en b) y d) del epígrafe 4.4, se concluye que en el intervalo de $m \in (0, 1/2)$ la distribución Trapezoidal CPR es la preferida, mientras que para el intervalo de $m \in (1/2, 1)$, la distribución Trapezoidal HH es la favorita.
11. Como se observa, no se puede indicar la distribución óptima para todos los problemas, debido a los comportamientos diferentes señalados, para los distintos valores de $m \in (0,1)$, pero por la supremacía de la distribución Trapezoidal HH respecto al criterio de minimizar la incertidumbre del valor modal m y centrar dicho valor, puesto de relieve en la 1ª y 2ª conclusiones, y por lo resaltado en la anterior conclusión, es esta la distribución a emplear cuando $m \in (1/2, 1)$ y la distribución Trapezoidal CPR cuando $m \in (0, 1/2)$.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKCAYOL, M.A., ELMAS, Ç., ERDEM, O.A. Y KURT, M. (2004) “An educational tool for fuzzy logic controller and classical controllers”. *Computer Applications in Engineering Education*, Vol. 12, Issue 2, pp. 126-135.

- CALLEJÓN, J., PÉREZ, E. Y RAMOS, A. (1996) “La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT”. Actas en CD-Rom de la X Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Albacete por la Universidad de Castilla la Mancha.
- HERRERÍAS, R. (editor) (2001). “Programación, Selección y Control de Proyectos en Ambiente de Incertidumbre”. Colección Monográfica de la Editorial Universidad de Granada.
- HERRERÍAS, R. Y CALVETE, H. (1987) “Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión”. Libro Homenaje al profesor Gonzalo Arnáiz Vellando. INE, Madrid, 279-296. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), pp. 119-127.
- HERRERÍAS, R., GARCÍA, J., CRUZ, S. Y HERRERÍAS, J.M. (2001). “Il modello probabilistico trapezoidale nel metodo delle due distribuzione della teoria generale de valutazioni”. *Genio Rurale. Rivista di Scienze Ambientali*, LXIV, pp. 3-9.
- HERRERÍAS, R. Y MIGUEL, S. (1989) “Expresiones alternativas para la varianza de la distribución trapezoidal”. Actas de la II Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Valladolid, 55-59. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), pp. 129-133.
- HERRERÍAS, R. Y HERRERÍAS, J.M. (2009) “Especificación de una distribución trapezoidal, a partir de las estimaciones subjetivas del método PERT”. VIII Seminario ASEPELT sobre Modelos de Generación de Distribuciones celebrado en Almería.
- HERRERÍAS, R. PALACIOS, F. Y CALLEJÓN, J. (2012) “Técnicas Cuantitativas para la Inferencia”. Delta ediciones
- KAUFMANN, A. Y GIL ALUJA, J. (1986). “Introducción de la teoría de conjuntos borrosos a la gestión de empresas”. Santiago de Compostela: Milladoiro.
- KOTZ, S. Y VAN DORP, J.R. (2004) “Uneven Two-Sided Power Distributions: With Applications in Econometric Models”. *Statistical Methods and Applications*, Vol. 13, pp. 285-313.

- POULIQUEN L. Y. (1970) “Risk Analysis in Project Appraisal”. World Bank Staff Occasional Papers, 1, John Hopkins University Press, Baltimore MD
- SUÁREZ A. (2007) “Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa”. Pirámide, 21ª edición.
- VAN DORP, J.R. Y KOTZ, S. (2003). “Generalized trapezoidal distributions”. *Metrika*, 58, pp. 85-97.
- VAN DORP, J.R., CRUZ, S., GARCÍA, J. Y HERRERÍAS, R. (2007). “An Elicitation Procedure for the Generalized Trapezoidal Distribution with a Uniform Central Stage”, *Decision Analysis Journal*, Vol. 4, pp. 156 – 166.
- VIVO, J. M. Y FRANCO, M. (2006) “La distribución trapezoidal en la metodología PERT”. Actas en CD-Rom de la XX Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en La Laguna.