

Una propuesta docente para el aprendizaje del Análisis Input-Output usando Teoría de Grafos

Tenorio Villalón, A.F. (aftenorio@upo.es)
Martín Caraballo, A.M. (ammarcar@upo.es)
Fedriani Martel, E.M. (efedmar@upo.es)

*Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide*

RESUMEN

En esta comunicación mostraremos una metodología alternativa para trabajar con nuestros estudiantes diversos tópicos del Análisis Input-Output. Dicha estrategia docente está basada en la Teoría de Grafos y pretende facilitar la asimilación de conceptos como los productos fundamentales, los conjuntos autónomos y la descomponibilidad de las matrices tecnológicas. Veremos que esta propuesta permite tratar estos conceptos de manera más intuitiva y abordarlos incluso de manera algorítmica, lo que puede facilitar la automatización de las tareas relacionadas por parte de los estudiantes.

ABSTRACT

This paper shows an alternative methodology based on Graph Theory so that our students can deal with several topics on Input-Output Analysis, such as: fundamental products, autonomous sets, or decomposability of technical matrices. Additionally, we show how this methodology allows us to work these concepts in a more intuitive and algorithmic way, which eases students' automation of procedures.

Palabras claves:

Productos fundamentales; conjuntos autónomos; matrices indescomponibles; digrafos; conectividad fuerte; componentes fuertemente conexas.

Área temática: Metodología y didáctica.

1. INTRODUCCIÓN

La aplicabilidad de la Teoría de Grafos a los múltiples ámbitos del conocimiento y de las ciencias (tanto técnicas como sociales) es una de sus grandes virtudes. En el ámbito de la Economía, son varios los artículos existentes sobre sus aplicaciones al Análisis Input-Output; véanse, por ejemplo, Bott y Mayberry (1954), De Mesnard (2004) o Fedriani y Tenorio (2006). El utilizar grafos en el ámbito del Análisis Input-Output puede permitir incluso traducir la noción de productividad en una economía a cuestionarse la existencia de determinados tipos de caminos en un grafo. Además, el estudio de procedimientos algorítmicos en Teoría de Grafos es un campo ampliamente estudiado y que permite afrontar numerosos problemas de otros ámbitos (en este caso, nos interesan los procedentes de la Economía) mediante rutinas que automatizarían el estudio de los mismos y que nos darían una valiosa información (Fedriani y Tenorio, 2006), facilitando su estudio. Una referencia clásica sobre el análisis de la algorítmica en el ámbito de la Teoría de Grafos es el clásico manual de Garey y Johnson (1979).

Pero en el presente artículo no queremos centrarnos en las ventajas que podría tener el enfoque de la Teoría de Grafos en el estudio del Análisis Input-Output, sino que disertaremos sobre cómo este enfoque puede ser de utilidad didáctica para con nuestros alumnos a la hora de explicar diferentes conceptos relacionados con este tema y que tradicionalmente se tratan desde un punto de vista puramente matricial. Principalmente, haremos énfasis en que el uso de los grafos permite ver y manipular de manera más intuitiva (y gráfica, obviamente) dichos conceptos, amén de simplificar los procesos lógicos de razonamiento que deberían llevarse a cabo, ya que el uso de la Teoría de Grafos facilita las pruebas y los cálculos involucrados en dichas ideas.

Los conceptos en que nos queremos fijar especialmente en este trabajo son principalmente dos: el de *producto fundamental* y el de *conjunto autónomo*. Estos dos conceptos son, en nuestra opinión, sumamente interesantes para el análisis de una economía y permiten alcanzar una mejor comprensión de su estructura permitiendo diseñar diversas estrategias de trabajo. Mientras que los conjuntos autónomos vienen a ser sectores productivos que actúan de manera independiente del resto de los sectores existentes en la economía, los productos fundamentales representan aquellos sectores de

los que se surten (directa o indirectamente) todos los demás y sin los cuales toda la economía se colapsaría. La noción de producto fundamental fue introducida por Sraffa (1960), siendo desarrollada posteriormente por diversos autores. Sin embargo, la aproximación abogada en tales trabajos (y que normalmente se traslada a nuestra docencia) parte de determinar los productos fundamentales a partir de los conjuntos autónomos obtenidos en la matriz de coeficientes técnicos. Al existir un elevado número de candidatos para conjuntos autónomos, encontrarlos es costoso en economías reales y, por ende, también lo es la determinación de los productos fundamentales. A continuación veremos que los grafos permiten cambiar el enfoque tradicional, centrándose primero en la determinación directa y rápida de los productos.

Igualmente, el uso de una aproximación basada en Teoría de Grafos permitiría solventar otros de los problemas clásicos que tenemos en docencia de estos conceptos: el uso de matrices de coeficientes técnicos de orden mayor que 3 no suele ser fácilmente aceptado por los alumnos por no disponer de las herramientas algebraicas para tratarlas. La Teoría de Grafos permite, en ocasiones, evitar el uso de inversas y determinantes, esquivando los errores de cálculo relativos a tales operaciones matriciales. En este sentido, veremos que los alumnos suelen preferir una aproximación a estos conceptos desde la Teoría de Grafos que desde el Álgebra Matricial y también comentaremos cuáles son las ventajas didácticas de este cambio.

Concluimos esta introducción comentando la estructura seguida en este artículo. La Sección 2 recuerda los conceptos y resultados de la Teoría de Grafos que utilizaremos posteriormente. En la Sección 3 revisitamos el modelo input-output y los conceptos económicos a trabajar con grafos en la Sección 4. Finalmente, la Sección 5 muestra una breve valoración sobre el uso de los grafos en la práctica docente para explicar dichos conceptos.

2. ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS SOBRE TEORÍA DE GRAFOS

Para una revisión completa sobre las nociones y resultados relativas a Teoría de Grafos, recomendamos se consulte el manual de Harary (1969) o el de Diestel (1997). Intuitivamente, un *grafo* consiste en un conjunto de vértices (representados por puntos)

y un conjunto de aristas (representadas por líneas o arcos uniendo dos vértices), tal y como ilustra la Figura 1. No obstante, una formulación matemática más rigurosa, que bien podría ser útil en algunos grupos de clase concretos, sería la siguiente:

Un *grafo* G se define como un par $G = (V_G, E_G)$, siendo V_G un conjunto finito no vacío y E_G un conjunto finito (que puede ser vacío) de pares no ordenados de distintos elementos de V_G . Cuando no hay confusión, puede utilizarse la notación V y E en lugar de V_G y E_G , respectivamente. Mientras que V_G recibe el nombre de *conjunto de vértices* y sus elementos son los *vértices* de G , el conjunto E_G se denomina *conjunto de aristas* y a sus elementos se les llama aristas de G .

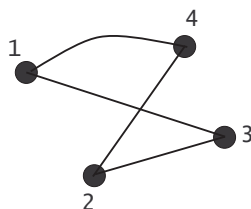


Figura 1. Ejemplo de grafo con conjunto de vértices $V = \{1,2,3,4\}$ y conjunto de aristas $E = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$.

En la definición anterior, no se admite ni que entre dos vértices haya más de una arista ni que los dos vértices de la arista coincidan. Un grafo que admite más de una arista entre dos vértices (*arista múltiple*) se denomina *multigrafo*. Por otro lado, un *pseudografo* consiste en admitir aristas con un único vértice (denominadas *lazos*).

La noción de subgrafo resulta de utilizar la relación “estar contenido en” dentro del contexto de los grafos. Así, un *subgrafo* del grafo $G = (V, E)$ es otro grafo cuyos vértices y aristas pertenecen, respectivamente, a los conjuntos V y E . Por su parte, un *camino* en el grafo G entre los vértices v_1 y v_{n+1} es una sucesión de aristas de G con la forma $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_n, v_{n+1}\}$. Se dice que el camino es *cerrado* si $v_1 = v_{n+1}$. Si, además, $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$, se dice que el camino es un *recorrido* entre v_1 y v_{n+1} . Los recorridos cerrados se denominan *ciclos*.

Un grafo G es *conexo* si existe un camino en G entre cualesquiera par de vértices de G . En caso contrario, el grafo se dice *disconexo*. Los grafos disconexos

pueden descomponerse en un determinado número de subgrafos conexos, denominados *componentes conexas*.

Se llama *árbol* a cualquier grafo conexo que no contiene ciclos. Un *subgrafo recubridor* de un grafo conexo G es un subgrafo suyo que es árbol y contiene a todos sus vértices. Por otro lado, un *árbol enraizado* es un árbol mostrando una estructura jerárquica con un vértice (denominado *raíz*) del que parten todas las ramas del árbol. La existencia de un árbol recubridor en un grafo dado G equivale a afirmar que dicho grafo es conexo.

En ocasiones, interesa distinguir la orientación de las aristas que componen el grafo, de modo que no es equivalente tener una arista yendo de v_1 a v_2 que yendo de v_2 a v_1 . Esta distinción, que resultará esencial en el caso del Análisis Input-Output, es el motivo para que introduzcamos la noción de *digrafo*, que simplemente es un grafo en el que sus aristas están orientadas, como se ilustra en la Figura 2.

Un *digrafo* o *grafo dirigido* es un par $D = (V_D, E_D)$ con un conjunto finito no vacío V_D y un conjunto finito E_D de pares ordenados de elementos en V_D . Mientras que V_D sigue denominándose *conjunto de vértices*, el conjunto E_D se llama *conjunto de arcos*, siendo sus elementos los *arcos* del digrafo. Si $(v, w) \in E_D$, diremos que es un arco (o arista dirigida) de v a w .

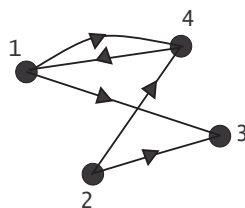


Figura 2. Ejemplo de digrafo con conjunto de vértices $V = \{1,2,3,4\}$ y conjunto de arcos $E = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (4,1)\}$.

Las nociones de aristas múltiples y lazos pueden también interpretarse en el ámbito de los dígrafos, dando lugar de manera natural a los conceptos de *arco múltiple* y *lazo dirigido*. También puede generalizarse la noción de contención entre digrafos como sigue: un *subdigrafo* de un digrafo $D = (V_D, E_D)$ es cualquier digrafo cuyos vértices están contenidos en V_D y sus arcos en E_D .

Asimismo, puede extenderse la noción de conexión para digrafos generalizando las nociones de caminos y ciclos ya definidos para grafos no dirigidos. Un *camino dirigido* en un digrafo D es una sucesión de arcos en D de la forma $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_{n+1})$, con lo que se dice que va de v_1 a v_{n+1} . Si $v_1 = v_{n+1}$, el camino dirigido se dice *cerrado*. Un camino dirigido se dice *recorrido dirigido* de v_1 a v_{n+1} si $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Si dicho recorrido es cerrado, este se denomina *ciclo dirigido*.

El grafo subyacente a un digrafo D es el grafo obtenido al reemplazar cada arco de D por la arista correspondiente, suprimir los lazos y simplificar las aristas múltiples.

Un digrafo D es *conexo* (resp. *disconexo*) si su grafo subyacente es conexo (resp. desconexo). Más aún, el digrafo es *fuertemente conexo* si existe un camino dirigido en D de un vértice dado a cualquier otro. Todo digrafo desconexo puede dividirse en un número finito de subdigrafos conexos maximales (no contenidos en otros), llamados *componentes conexas*.

Un *árbol dirigido saliente enraizado en el vértice v* es un árbol en el que existe un único camino dirigido en el árbol desde el vértice v a cualquier otro vértice. Un *árbol dirigido entrante enraizado en el vértice v* es un árbol en el que existe un único camino dirigido en el árbol desde cualquier vértice al vértice v . En ambos casos, el vértice v se denomina raíz del árbol. Si todos los vértices de D están incluidos en el árbol, este se denomina *recubridor*.

La existencia de un árbol recubridor dirigido entrante y otro saliente enraizados en un mismo vértice es equivalente a que el digrafo D sea fuertemente conexo.

Como se ha podido observar en esta descripción de conceptos de la Teoría de Grafos, aunque se puede profundizar mucho más en cada apartado, lo explicado aquí puede ser fácilmente asimilable por cualquier estudiante, sin necesidad de unos conocimientos previos excesivamente exigentes.

3. BREVE REPASO DEL ANÁLISIS INPUT-OUTPUT

A continuación resumimos los conceptos de que haremos uso, a fin de unificar la notación. Antes, repasamos brevemente el origen del Análisis Input-Output.

El Análisis Input-Output fue desarrollado por Leontief (1936, 1941, 1966) en una serie de trabajos que permitían estudiar las interrelaciones entre las distintas actividades económicas en una economía por medio del Álgebra Matricial. El modelo que propuso posibilitaba, entre otros aspectos, medir la reacción que se produce tanto en los *outputs* industriales como en los precios de sus productos a causa de los cambios en la productividad y el ahorro.

El primer antecedente reconocido del Análisis Input-Output se remonta al *Tableau Economique* de François Quesnay (1758), con su representación gráfica y numérica de las relaciones entre compras y ventas de las industrias en una economía. Posteriormente, Walras (1874) aplicó la mecánica newtoniana para desarrollar una formulación teórica de un sistema económico a partir del trabajo de Quesnay, incluyendo las compras de los consumidores en el modelo matemático y usando un conjunto de *coeficientes productivos*, que relacionaba la cantidad de bien necesario para producir una unidad de un producto concreto a niveles de producción total de dicho producto; es decir, usando unos coeficientes similares a los actuales coeficientes técnicos.

Inicialmente, Leontief simplificó el modelo de Walras imponiendo dos hipótesis: tanto la tecnología como los patrones de comercio se consideran constantes en el tiempo. Así, el primer modelo de Leontief permite analizar sistemáticamente la interdependencia entre los distintos sectores industriales para poder estimar los flujos y relaciones entre estos.

Aunque recordaremos algunas de las nociones básicas referidas en el presente trabajo, se pueden consultar con más detalle en el clásico trabajo de Miller y Blair (1985), donde se realiza una exposición completa sobre estos tópicos. En nuestra propuesta metodológica, nos basamos en el modelo input-output más sencillo para una región geográfica y que se construye a partir de los datos económicos observados durante un período temporal (normalmente un año) para la actividad de los sectores productivos. Estos sectores producen cada uno un único bien y consumen bienes de otros sectores (pudiendo estar incluido el suyo propio) para producir su bien. Como los sectores productivos pueden considerarse como productores y consumidores, los bienes se pueden llamar *outputs* cuando se producen e *inputs* cuando se consumen.

Se miden, en unidades monetarias, los flujos intersectoriales de los productos entre sectores productivos para un período temporal. Esas mediciones se resumen en la *matriz de flujos intersectoriales* o *de transacciones*, que resulta ser la herramienta algebraica sobre la que se sustenta el Análisis Input-Output. Para una economía E con n sectores productivos, los términos de la tabla anterior se pueden denotar z_{ij} , siendo i el productor y j el consumidor. Por tanto, la fila i corresponde a la distribución del total de ventas para el sector i entre los restantes sectores de E . Análogamente, la columna j indica las compras realizadas por el sector j a cada sector de la economía E . Por tanto, el output de un sector siempre es input para otro. De manera natural, los flujos intersectoriales z_{ij} pueden completarse con una columna adicional (o varias desglosadas) que registre(n) las ventas a consumidores finales, gobierno y mercado de exportación. El resultado sería la *matriz de transacciones* de la economía E , siendo la columna adicional la denominada *demanda final*. En consecuencia, el output de cualquier sector se distribuye en tres apartados: como input del propio sector para continuar su producción; como input de los restantes sectores productivos; y como input correspondiente a la demanda final de la economía.

Si X_i representa el output total del sector i e Y_i la demanda final de su producto, se satisface que $X_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + Y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, según el modelo abierto de Leontief por el que la demanda final de un sector no queda determinada por el output total del mismo. Sin embargo, la demanda final suele expresarse en función del output producido por la economía y es parte de la matriz de flujos intersectoriales, añadiendo tanto filas como columnas adicionales y dando lugar al denominado modelo cerrado de Leontief.

Los cambios en la producción de los distintos sectores productivos a causa de cambios en la demanda final se estudian por medio de los *coeficientes técnicos* a_{ij} , que pueden interpretarse como el valor del input comprador por el sector j al sector i por unidad monetaria del output del sector j . Por tanto, su cálculo resulta de $a_{ij} = \frac{z_{ij}}{X_j}$.

Estos coeficientes se organizan en una matriz cuadrada de orden n denominada *matriz*

de coeficientes técnicos, la cual se denota habitualmente por A y provee una visión cuantitativamente determinada de la estructura interna del sistema económico que permite comparar dos economías entre sí o la misma economía en diferentes períodos de tiempo.

Por lo general, en Economía es de gran utilidad determinar cuáles son los productos (o sectores) que intervienen en la producción de todos y cada uno de los productos existentes en la economía. Dada una economía E con n sectores productivos, que denotaremos por $N = \{1, \dots, n\}$, la matriz de coeficientes técnicos es $A = (a_{ij})_{i,j}$. Supongamos que $n > 1$ y sea N el conjunto índice de la economía (con todos los sectores). El producto $i \in N$ es un *producto fundamental* de la economía si toma parte (directa o indirectamente) en la producción de todos los productos (incluido él mismo).

El cálculo de productos fundamentales suele utilizar el concepto de conjunto autónomo de la matriz de coeficientes técnicos. Desde el punto de vista matemático, un subconjunto $B \subseteq N$ no vacío se dice *autónomo* si $a_{ij} = 0$ para todo $i \in B$ y para todo $j \in N \setminus B$. Un conjunto autónomo B puede interpretarse económicamente como que ningún sector fuera del conjunto B vende sus productos a sectores en el conjunto B , ya que un sector i vende parte de su producción a otro sector j cuando $a_{ij} \neq 0$.

Tras definir los conjuntos autónomos de la matriz de coeficientes técnicos A , los productos fundamentales suelen obtenerse en otros dos pasos más: primero, los elementos del conjunto autónomo minimal serán candidatos a producto fundamental; y segundo, se estudian dichos candidatos uno a uno para determinar si son fundamentales.

En relación a los conjuntos autónomos y productos fundamentales, una matriz de coeficientes técnicos se dice *indescomponible* (o *irreducible*) si su único conjunto autónomo es el conjunto índice N (todos los de la economía). En caso contrario, se dice que la matriz es *descomponible* (o *reducible*). Más aún, la matriz es *totalmente descomponible* si existen dos conjuntos autónomos B_1 y B_2 verificando las dos siguientes condiciones:

$$a) \quad B_1 \cup B_2 = N ;$$

$$b) \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Es decir, cada sector pertenece a un único subconjunto de estos dos.

4. EXPLICANDO LOS PRODUCTOS FUNDAMENTALES POR MEDIO DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Seguidamente explicaremos cómo pueden tratarse los conceptos de producto fundamental, conjunto autónomo y matriz descomponible usando nociones y resultados propios de la Teoría de Grafos o, lo que es lo mismo, empleando herramientas topológicas.

Al igual que en la sección anterior, consideramos una economía E con conjunto índice $N = \{1, \dots, n\}$ y matriz de coeficientes técnicos $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathfrak{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz anterior, construimos un digrafo $D(E) = (V, A)$ asociado, como sigue: tomamos como conjunto de vértices V al conjunto índice N , mientras que el conjunto de arcos A resulta ser el de los pares $(i, j) \in N \times N$ con $a_{ij} \neq 0$. Por tanto, la existencia de un arco yendo del sector i al sector j se produce si y solo si el coeficiente técnico a_{ij} no es cero o, equivalentemente, el sector i vende parte de su producción al sector j .

Ejemplo. Sea la economía E con conjunto índice $N = \{1, 2, 3\}$ y matriz de coeficientes técnicos

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Su digrafo asociado $D(E)$ viene dado por el conjunto de vértices $V = N = \{1, 2, 3\}$ y conjunto de aristas $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ tal y como puede verse en la Figura 3.

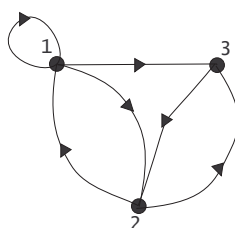


Figura 3. Ejemplo de digrafo para una economía.

Ahora veamos cómo los digrafos pueden utilizarse para estudiar los conceptos de productos fundamentales y de matrices descomponibles. Si se requieren las demostraciones, estos resultados están detallados en Fedriani y Tenorio (2012). Primero indicamos que la determinación de productos fundamentales de la economía E se reduce a hallar caminos dirigidos en el digrafo $D(E)$.

Proposición 1. El producto i de la economía E es un producto fundamental si y solo si existe un camino dirigido en el digrafo asociado $D(E)$ de i a j para todo $j \in N$.

Aunque es fácilmente automatizable la determinación de todos los caminos dirigidos que parten desde el vértice i , sigue siendo computacionalmente costoso y sería interesante simplificar el número de caminos a determinar. Una primera forma de lograrlo se centraría en reducir la determinación de los restantes productos fundamentales a determinar solo uno de dichos productos. Este es el objetivo del siguiente resultado:

Corolario 2. Si $i \in N$ es un producto fundamental de la economía E , el producto $j \in N$ es también fundamental si y solo si existe un camino dirigido de j a i en el digrafo $D(E)$.

Este resultado se basa en que un producto que vende a un producto fundamental indirectamente interviene en todos los sectores de la economía por mediación del producto fundamental ya determinado.

Usando los dos resultados previos, los alumnos tienen una caracterización sencilla para determinar cuándo todos los productos de la economía son fundamentales.

Esta caracterización es fácilmente tratable de manera algorítmica, existiendo varios algoritmos de búsqueda para hallar los caminos dirigidos que caracterizan la situación.

Corolario 3. Todos los productos son fundamentales en la economía E si y solo si existe un ciclo dirigido conteniendo todos los vértices de $D(E)$.

Ejemplo. Si consideramos la economía cuyo grafo asociado es el de la Figura 3, todos sus productos son fundamentales, de acuerdo con la Proposición 1. Veamos lo sencillo que es determinar cuáles son los caminos dirigidos que parten a partir de cada sector de la economía:

- Desde el sector 1 al $\begin{cases} \text{sector 1 : (1,1);} \\ \text{sector 2 : (1,2);} \\ \text{sector 3 : (1,3).} \end{cases}$
- Desde el sector 2 al $\begin{cases} \text{sector 1 : (2,1);} \\ \text{sector 2 : \{(2,1),(1,2)\};} \\ \text{sector 3 : (2,3).} \end{cases}$
- Desde el sector 3 al $\begin{cases} \text{sector 1 : \{(3,2),(2,1)\};} \\ \text{sector 2 : (3,2);} \\ \text{sector 3 : \{(3,2),(2,3)\}.} \end{cases}$

La existencia de un camino dirigido desde cada vértice a todos los de la economía (incluido él mismo) permite asegurar que cada producto de la economía es un producto fundamental. Esto podría haber sido determinado más rápida y sencillamente si se tuviese en cuenta lo indicado en el Corolario 3, ya que no sería necesario hallar todos los caminos anteriores sino que bastaría con encontrar un camino dirigido en el grafo. Por ejemplo, bastaría considerar el ciclo cerrado $\{(1,3), (3,2), (2,1)\}$.

Usando la Teoría de Grafos, las siguientes propiedades sobre conjuntos autónomos pueden verse desde esa perspectiva, facilitando la comprensión de dichos conceptos y su posterior aplicación por nuestros alumnos.

Lema 4. El conjunto $S \subset N$ es autónomo si y solo si no existen arcos desde un vértice de $N \setminus S$ a uno de S .

Proposición 5. Si la economía E tiene algún producto fundamental, entonces el conjunto formado por los productos fundamentales es un conjunto autónomo que está contenido en cualquier otro subconjunto autónomo.

Obsérvese que con esta proposición lo que tenemos es una forma de obtener los conjuntos autónomos a partir de los productos fundamentales y no al revés. En el caso de una aproximación basada en Teoría de Grafos a estas nociones, es preferente determinar la lista de productos fundamentales mediante una búsqueda de caminos dirigidos y después se obtienen todos los conjuntos que contienen a dicho listado, obteniendo todos los candidatos a conjunto autónomo.

Recuérdese que los conjuntos autónomos pueden existir pese a no haber conjuntos fundamentales. Por ejemplo, si la matriz de coeficientes técnicos de la economía E fuese diagonal, los únicos arcos del digrafo asociado $D(E)$ serían los lazos existentes en cada vértice. Por tanto, todos los vértices estarían aislados en $D(E)$ y cada conjunto unitario formado por un vértice sería un conjunto autónomo, pero ningún producto (vértice) sería fundamental.

También usando la Teoría de Grafos, podemos enunciar un criterio de existencia de un único conjunto autónomo en la economía E coincidente con el propio conjunto índice N .

Teorema 6. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. N es el único conjunto autónomo de la economía E .
2. Todos los productos son fundamentales.
3. $D(E)$ es un digrafo fuertemente correcto.

Si no todos los productos son fundamentales, no podemos usar que el digrafo sea fuertemente conexo. Eso sí, la determinación de que un producto sea fundamental se reducirá a encontrar un árbol dirigido saliente que contenga a todos las vértices (lo cual está bien estudiado algorítmicamente y resulta muy sencillo gráficamente).

Proposición 7. Si existe un producto fundamental $i \in N$, entonces el digrafo asociado $D(E)$ es conexo y contiene un árbol dirigido saliente enraizado en i y conteniendo a todos los vértices de $D(E)$.

Sin embargo, la existencia del árbol indicado en la proposición anterior no asegura que el producto i sea fundamental. Eso es lo que pasa en el digrafo $D(E)$ asociado a la economía E que se ilustra en la Figura 4, cuyos árboles dirigidos salientes enraizados en cada uno de sus vértices se observan en la Figura 5. Sin embargo, no existen caminos dirigidos del sector 1 a sí mismo, del sector 2 al sector 1 y del sector 3 al sector 1.

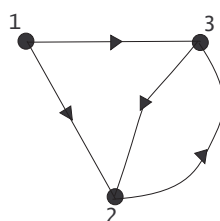


Figura 4. Digrafo asociado a una economía sin productos fundamentales.

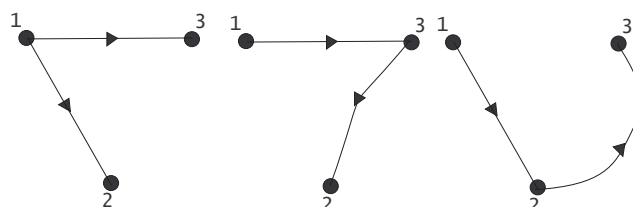


Figura 5. Árboles dirigidos salientes recubridores enraizados en cada vértice del digrafo de la Figura 4.

La Proposición 7 provee una condición necesaria para los productos fundamentales, pero no es suficiente, como acabamos de ver. No obstante, si añadimos una condición adicional a la existencia de árboles dirigidos salientes en $D(E)$, podemos obtener una caracterización por medio de una condición necesaria y suficiente. De hecho, bastaría con añadir la existencia de un ciclo cerrado en el vértice que representa al producto que tiene uno de dichos árboles.

Proposición 8. El producto i es fundamental si y solo si en el digrafo $D(E)$ existe un árbol dirigido saliente recubridor enraizado en i y un ciclo dirigido conteniendo al dicho vértice.

En vista de todo lo anterior, podemos caracterizar también la descomponibilidad de la matriz de coeficientes técnicos por medio de las nociones de Teoría de Grafos. Concretamente, la descomponibilidad de dicha matriz equivaldrá a comprobar que el digrafo $D(E)$ tiene varias componentes fuertemente conexas (i.e., el digrafo puede representarse gráficamente en varios subgrafos que no están conectados por arcos entre sí. La determinación de componentes (fuertemente) conexas de un digrafo es un procedimiento algorítmico fácilmente asimilable por los estudiantes.

Teorema 9. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La matriz de coeficientes técnicos de la economía E es descomponible.
2. Los vértices de $D(E)$ se dividen en dos subconjuntos disjuntos no vacíos tales que no existen arcos del primer conjunto al segundo.
3. Existe más de una componente fuertemente conexa en $D(E)$.

Teorema 10. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz de coeficientes técnicos de la economía E es totalmente descomponible.
2. Los vértices de $D(E)$ se dividen en dos conjuntos disjuntos no vacíos tales que no existen arcos de un conjunto al otro.
3. Existe más de una componente conexa en $D(E)$.

Finalmente, veamos que algunas condiciones sobre la existencia de conjuntos autónomos puede interpretarse en términos de componentes conexas del digrafo asociado en $D(E)$.

Proposición 11. Si C es una componente conexa del digrafo $D(E)$, los vértices de C forman un conjunto autónomo de la economía E .

Cuando hay componentes conexas, los estudiantes deben concluir que no puede haber productos fundamentales (pues no existen árboles recubridores). Pero es más: todo conjunto autónomo ha de estar contenido en alguna de las componentes conexas del digrafo $D(E)$, por lo que dichas componentes son la base de la que deben partir para el cálculo de los restantes conjuntos autónomos.

5. VALORACIÓN DE TÉCNICAS DOCENTES MÁS VISUALES

La propuesta que se acaba de realizar es consistente con la estrategia de presentar las Matemáticas de una forma visual y hasta manipulativa. La primera impresión de cuantos la hemos aplicado en el aula es que el alumno es más receptivo a los conceptos y que les resultan más sencillos. Desde el punto de vista del docente, además, resulta más ágil la explicación con grafos y se necesitan menos ejemplos para comunicar lo mismo. Ambos aspectos (receptividad y rapidez) están muy relacionados en la práctica, pues la explicación mediante Teoría de Grafos rara vez provoca preguntas adicionales de los alumnos y enseguida les permite trabajar autónomamente. Con respecto a la durabilidad de las técnicas aprehendidas, aunque no tenemos pruebas, sospechamos que la comunicación más gráfica también favorece a la memorización y el recuerdo a largo plazo.

En definitiva, todo parecen ventajas a favor de la metodología aquí presentada: los alumnos aprenden más rápido y mejor. Si acaso, podríamos dudar de si la facilidad con la que se adquieren los conocimientos puede afectar negativamente al espíritu de esfuerzo y superación de los estudiantes.

No obstante, lo anteriormente descrito no deja de ser la opinión subjetiva de los profesores que han experimentado diferentes posibilidades docentes a lo largo de los años. Por eso, presentamos a continuación un experimento real y objetivo. Ha sido llevado a cabo con alumnos del Máster de Investigación en Gestión, en la Universidad Pablo de Olavide. En concreto, se trata de explicar los resultados de una prueba de

evaluación presencial, realizada al final de la última sesión del bloque de Álgebra Matricial en la asignatura que actualmente se llama “Introducción a la Econometría”, inmediatamente tras la explicación de los conceptos básicos relativos al Análisis Input-Output. La evaluación a la que nos referimos se produce sin dejar prácticamente que los alumnos asienten los conocimientos sobre este tema, aunque hay que reconocer que algunos alumnos (aproximadamente un 15% del total de matriculados) ya conocen dichos conceptos antes de la explicación de los mismos. La heterogeneidad en la formación que los estudiantes traen de base no solo acontece dentro de una misma promoción sino entre las distintas promociones, pudiendo causar variaciones de un curso académico a otro.

Específicamente con las condiciones anteriores, se realizó el experimento en cada uno de los tres últimos cursos académicos. En el curso 2009/2010 se explicaron los conceptos de manera tradicional, en el 2010/2011 se presentaron mediante ambas vías (de manera tradicional y, justo después, utilizando la interpretación dada por la Teoría de Grafos), mientras que en el 2011/2012 se presentaron exclusivamente mediante la Teoría de Grafos. Este tercer curso es en el que se dedicó menos tiempo a la explicación de los conceptos, porque la explicación es más rápida usando grafos, pero también porque había menos tiempo disponible en la última sesión.

A cada estudiante se le proporcionaba una matriz cuadrada de orden 3 (hay previstos 4 tipos de matrices, para evitar una “colaboración excesiva” entre los alumnos, pero se propusieron las mismas matrices en los tres cursos) y se les preguntaba cuáles eran los conjuntos autónomos, cuáles los productos fundamentales y si la matriz era descomponible o no. A los efectos de este sucinto análisis estadístico, calificaremos las pruebas entre 0 y 3 puntos (cada pregunta completamente acertada es un punto y cualquier error significa la pérdida del punto correspondiente). En el curso 2009/2010 se examinaron 11 alumnos y la nota media fue de 1,91; en el curso 2010/2011 hubo 13 alumnos y la nota media fue de 2,23; en el 2011/2012 también se computan 13 exámenes y la media fue de 2,54. Con las reservas propias de una muestra tan escueta y del uso de una técnicas estadísticas excesivamente elementales, podemos inferir un resultado parcialmente sorprendente, pues la explicación mediante grafos parece resultar más efectiva incluso que la realizada por ambos métodos, uno tras el otro. Es

relativamente lógico esperar que el método gráfico resulte más comprensible, sobre todo a corto plazo, que el método tradicional; sin embargo, no era tan esperable que prescindir del método tradicional pudiese proporcionar ventaja a los estudiantes. La explicación de este hecho puede deberse a que los alumnos que recibían ambas explicaciones en tan corto plazo pudieron verse afectados por la confusión propia de querer asimilar demasiados conceptos distintos en poco tiempo. En las Figuras 5 y 6 pueden consultarse los resultados específicos del experimento que consideramos que constituye una buena prueba de las posibilidades de nuestra propuesta metodológica.



Figura 5. Calificación media de los alumnos en la evaluación.

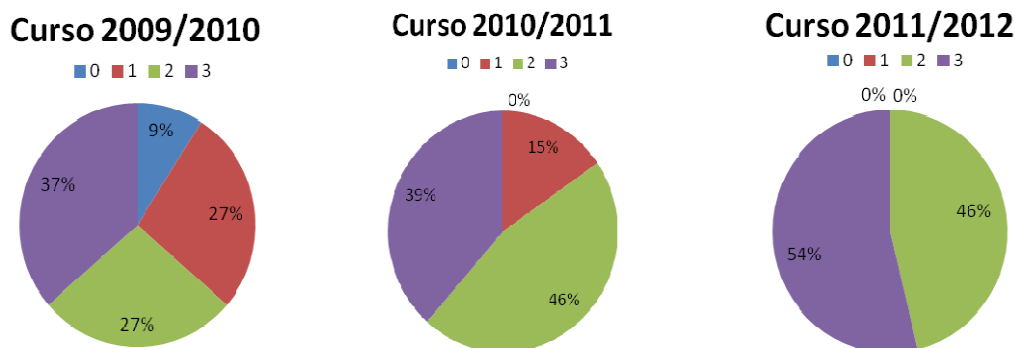


Figura 6. Distribución porcentual de las calificaciones de 0 a 3 en los cursos 2009/2010, 2010/2011 y 2011/2012.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOTT, R. y MAYBERRY, J.P. (1954) “Matrices and Trees”. En O. Morgenstern, (Ed.). “Economic Activity Analysis”. Wiley: New York, pp. 391–400.

- DE MESNARD, L. (2004) “Understanding the shortcomings of commodity-based technology in input-output models: an economic-circuit approach”. *J. Regional Sci.*, 44, 1, pp. 125–141.
- DIESTEL, R. (1997) “Graph Theory”. Springer: New York.
- FEDRIANI, E.M. y TENORIO, A.F. (2006) “Algorithms to compute autonomous sets and fundamental products in input-output matrices”. *Lecture Series on Computer and Computational Sciences*, 7, pp. 145–148.
- FEDRIANI, E.M. y TENORIO, A.F. (2012) “Simplifying the Input-Output Analysis through the Use of Topological Graphs”. *Economic Modelling*, pendiente de publicación.
- GAREY, M.R. y JOHNSON, D.M. (1979) “Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness”. W.H. Freeman: New York.
- HARARY, F. (1969) “Graph Theory”. Addison-Wesley: Massachusetts.
- LEONTIEF, W.W. (1936) “Quantitative input-output relations in the economic system of the United States”. *Rev. Econ. Statistics* 18, 105–125.
- LEONTIEF, W.W. (1941) “The Structure of the American Economy, 1919-1929.” Harvard University Press: Cambridge.
- LEONTIEF, W.W. (1966) “Input-Output Economics.” Oxford University Press: New York.
- MILLER, R.E. y BLAIR, P.D. (1985) “Input-Output Analysis: Foundations and Extensions.” Prentice-Hall: New Jersey.
- QUESNAY, F. (1758) “Tableau Economique”.
- SRAFFA, P. (1960) “Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory”. Cambridge University Press: Cambridge.
- WALRAS, L. (1874) “Éléments d'économie politique pure”. L. Corbaz & cie.: Lausanne.