

Regulación óptima de las fases de los semáforos en un cruce e impacto medioambiental

Pedreira Andrade, Luís Pedro [lucky@udc.es]

Dpto. Economía Aplicada II

Universidade da Coruña

Villamil Serrano, Armando [avillamil@ub.edu]

Dpto. Política Económica y Estructura Económica Mundial

Universidad de Barcelona

Bouza Allende, Gemayqzel [gema@matcom.uh.cu]

Allende Alonso, Sira [sira@matcom.uh.cu]

Universidad de La Habana (La Habana-Cuba)

RESUMEN

El aumento progresivo de circulación de vehículos en las ciudades y el correspondiente colapso de las arterias viarias, crea la necesidad de promover medidas que favorezcan la circulación fluida. Entre ellas está la implantación de sistemas de coordinación semafórica que permiten reducir la longitud de las colas, los tiempos de espera y las emisiones de gases contaminantes, el más importante el CO₂, culpable de uno de los impactos medioambientales más graves sobre el cambio climático. El objetivo de este trabajo es resolver un problema de control óptimo que consiste en asignar tiempos a luces de semáforos que regulan cruces de dos calles con los dos sentidos de circulación, con dos carriles en cada sentido y con un semáforo en cada uno de ellos (cuatro fases en cada ciclo). Para su solución, proponemos usar un método híbrido que combina una heurística, tipo recocido simulado con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves.

Palabras claves:

Intersecciones semaforizadas; control óptimo de semáforos; recocido simulado; emisión de gases contaminantes.

Área temática: Optimización.

ABSTRACT

The gradual increase of movement of vehicles in cities and the associated collapse of the main roads, creates the necessity to project measures to promote the fluid circulation. Among them, it is the establishment of systems to coordinate traffic lights. It allows reduce the length of the queues, waiting times and emissions of polluting gases, the most important CO₂, culprit of one of more serious environmental impacts on the climatic change. Let us consider an intersection of two two-way streets, with two trucks in each way (eight traffic lights and four phases in each cycle). We want to solve the problem of finding the switch times of the corresponding traffic lights. In order to solve it, we propose a hybrid solution strategy where an approximation to the solution is computed by means of a simulated annealing algorithm and then it is improved by a quasi-Newton method for non-smooth optimization problems.

Keywords: Intersections with traffic lights; optimal traffic lights control; simulated annealing; emissions of polluting gases.

1. INTRODUCCIÓN

Es necesario conseguir un sistema eficaz de transporte que facilite la movilidad de personas y mercancías. Podemos afirmar que esa movilidad es un factor importante que contribuye al crecimiento económico sostenible y a la generación de empleo. Para ello no sólo es necesario generar una infraestructura física adecuada, sino minimizar los impactos medioambientales que el transporte urbano y otros generan sobre el entorno. En efecto, la movilidad origina una serie de costes medioambientales, debido a sus implicaciones nocivas sobre el cambio climático (actualmente las emisiones de CO₂ son superiores en más de un 30% a las producidas en 1.990) y el transporte de todo tipo es el *“único sector de la economía respecto del que se pronostican incrementos de las emisiones”*¹. Aunque ha mejorado la eficiencia energética de los turismos mediante la aplicación de nuevas tecnologías y el peso de los mismos se ha reducido, lo que ha repercutido en un menor consumo de combustible, el número de automóviles ha crecido. Pero además el ruido, la congestión del tráfico, cuya *“disminución contribuirá significativamente a la reducción de las emisiones de CO₂”*², los accidentes y los efectos sobre la salud acarrearán una serie de costes económicos y sociales que el Libro Blanco sobre Crecimiento, Competitividad y Empleo³, denominó: *“pérdidas de bienestar significativas, aunque ocultas”*, que pese a la dificultad de cuantificarlas la Unión Europea las valora en torno al 4% del PIB.

La Unión Europea tiene diferentes medios, a través de los cuales pretende mitigar los indeseables impactos citados con anterioridad. Desde el establecimiento de normas de comportamiento para los turismos nuevos, con el fin de reducir las emisiones de CO₂⁴, hasta el uso de una normativa para disminuir el ruido de vehículos de motor, pasando por las medidas ordenadoras del tráfico, como pueden ser, entre otras, el

¹ Comisión de las Comunidades Europeas: “Comunicación de la Comisión al Consejo y al Parlamento Europeo. Hacia un transporte más ecológico”. COM (2008) 433, 8/7/2008; en la pág. 2.

² Comisión de las Comunidades Europeas: op. cit. ant., en la pág. 8.

³ Comisión Europea: “Libro Blanco sobre Crecimiento, Competitividad y Empleo. Condiciones para el crecimiento y para una mayor competitividad”. Boletín Económico de ICE, nº 2.406; en la pág. 821.

⁴ Véase al respecto: Reglamento (CE) nº 443/2009 del Parlamento Europeo y del Consejo.

funcionamiento de los semáforos que regulan una intersección vial, que es el tema que abordamos.

Los objetivos del diseño de una intersección regulada por semáforos son:

- Reducir y prevenir cierto tipo de accidentes en la intersección y en las intersecciones aledañas.
- Reducir las demoras que experimentan los peatones y los vehículos al intentar cruzar la intersección, y al mismo tiempo evitar los obstáculos en las intersecciones más cercanas causado por colas largas.
- Reducir el consumo de combustible de los vehículos en la intersección.
- Reducir la emisión de contaminantes al aire (CO_2), que afectará positivamente al efecto invernadero, así como a la disminución de ruidos.
- Por último, mejorar la calidad de vida de los ciudadanos y su salud.

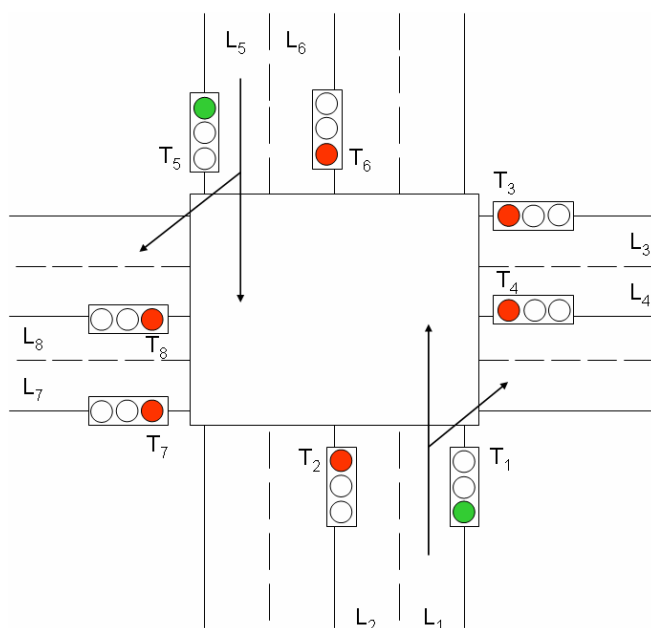
Para que dichos objetivos se cumplan, las acciones fundamentales son: sincronizar el ciclo de los semáforos, es decir, la secuencia de estados (rojo, verde, etc.) por la que pasan los semáforos y que se repite de manera cíclica y regular de forma óptima las fases, es decir optimizar el tiempo dedicado a cada una de las combinaciones de indicaciones que permiten uno o varios movimientos simultáneos a través de la intersección.

En este trabajo exponemos un problema de control de semáforos en un cruce (con ocho semáforos) de dos calles con los dos sentidos de circulación y con dos carriles en cada sentido, en un entorno urbano. Los resultados están organizados así: en las dos próximas secciones presentamos dos modelos matemáticos para dicho problema basados en los formulados en [Lema, C. et al. (2010)] pero adaptados a las características del cruce mencionado. En la siguiente exponemos nuestro método de solución (válido para ambos modelos, usando en cada caso la función objetivo correspondiente) que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves. A continuación mostramos algunos resultados numéricos obtenidos mediante la programación con MATLAB de dicho método, comparando las soluciones obtenidas para cada uno de los modelos y para finalizar enumeramos algunas conclusiones y líneas futuras de investigación.

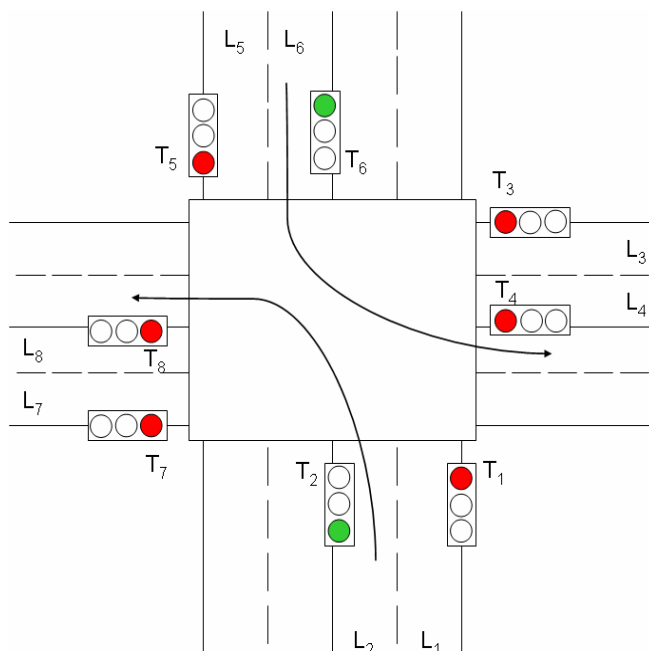
2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y SU MODELACIÓN

En esta sección presentamos un modelo matemático para el problema de control de tráfico en un cruce. Se tiene una intersección a la que confluyen dos calles, ambas doble vía, (con dos carriles en cada sentido de circulación), en las que se puede circular de frente, girar a derecha e izquierda. En cada carril, antes de rebasar el cruce hay un semáforo, por tanto es un cruce con ocho semáforos. Los semáforos T_1 , T_3 , T_5 y T_7 permiten seguir de frente o girar a la derecha, y los semáforos T_2 , T_4 , T_6 y T_8 sólo permiten girar a la izquierda. Se quiere hallar los períodos en que deben permanecer en verde o rojo las luces de los semáforos T_i , $i=1,\dots,8$ para evitar la congestión de la vías, descrita por el número de vehículos en espera (longitud de la cola) en cada vía. Para ello se consideran distintos criterios: la suma de las longitudes medias de las colas de cada vía, longitud de la cola más larga, tiempo medio de espera o una combinación de ellas. Con este planteamiento hemos de modelar y resolver un problema que en cada ciclo tiene cuatro fases:

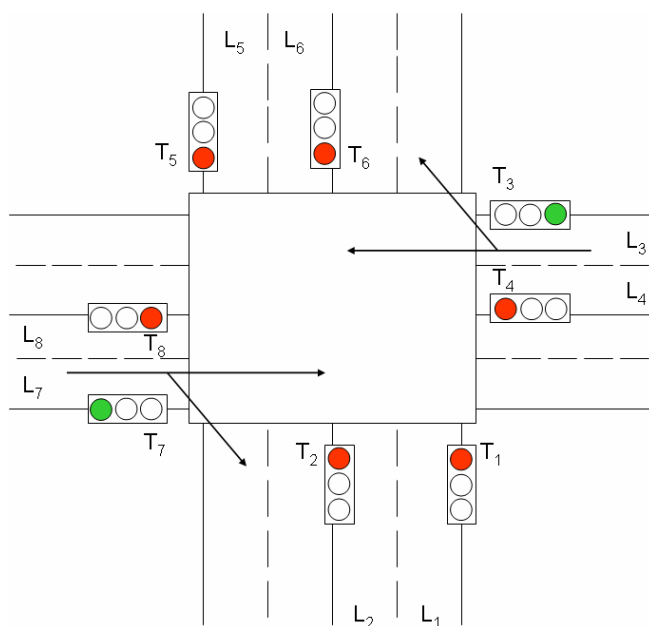
- En la **primera fase** los semáforos T_1 y T_5 están en verde (los demás semáforos están en rojo), por tanto los vehículos que circulan por los carriles L_1 y L_5 rebasan el cruce, continuando de frente o girando a la derecha.



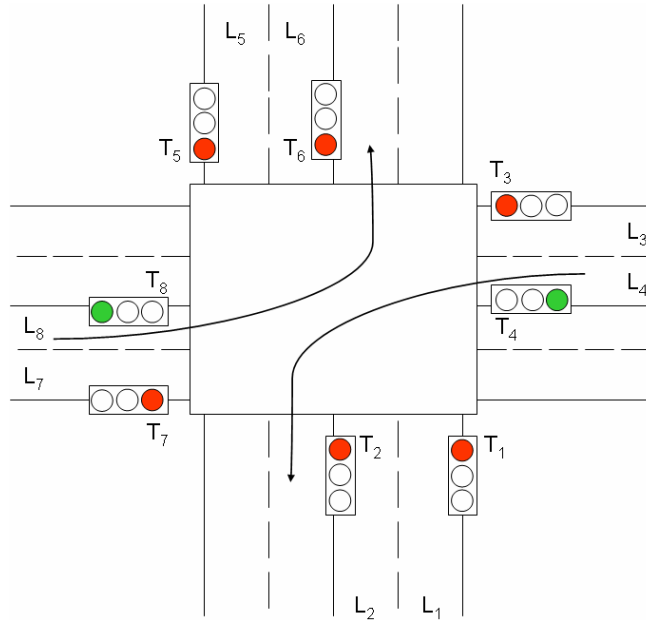
- En la **segunda fase** los semáforos T_2 y T_6 que han cambiado de rojo a verde, permiten que los vehículos que circulan por los carriles L_2 y L_6 rebasen el cruce, para girar hacia la izquierda (los demás semáforos están en rojo).



- En la **tercera fase** los semáforos T_3 y T_7 que han cambiado de rojo a verde, permiten que los vehículos que circulan por los carriles L_3 y L_7 rebasen el cruce, continuando de frente o girando a la derecha (los demás semáforos están en rojo).



- En la **cuarta fase** los semáforos T_4 y T_8 que han cambiado de rojo a verde, permiten que los vehículos que circulan por los carriles L_4 y L_8 rebasen el cruce, para girar hacia la izquierda (los demás semáforos están en rojo).



Consideraremos dado el número de veces que los semáforos tienen la luz verde y lo denotaremos por N . También se considera pre-establecido δ_{amb} que representa el tiempo de duración de la luz ámbar (en la práctica se considera una constante que fluctúa entre los 3 y los 4 segundos).

Describimos el problema con las *variables de control* δ_k , tiempo de duración de la luz verde en el k -ésimo cambio de luz (incluyendo el ámbar) y las *variables de estado* $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, x_{k4}, x_{k5}, x_{k6}, x_{k7}, x_{k8})^t$, cantidad promedio de vehículos en los carriles L_i , $i=1, \dots, 8$ en el momento del k -ésimo cambio de luz.

Como simplificaciones del modelo trabajaremos con el comportamiento promedio por lo que asumimos que la cantidad de autos es continua. Para cada carril L_i se definen las tasas medias de llegada y salida de los vehículos bajo las luces verde y ámbar y se denotan:

λ_i : tasa media de llegada de vehículos en el carril L_i (dada en vehículos por segundo).

μ_i : tasa media de salida en el carril L_i cuando el semáforo está en verde.

κ_i : tasa media de salida en el carril L_i cuando el semáforo está en ámbar.

Los vectores b_i , $i=1,\dots,12$ representan el número de vehículos en cada carril teniendo en cuenta los movimientos asociados a cada fase:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 - \mu_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 - \mu_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 - \mu_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 - \mu_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 - \mu_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 - \mu_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 - \mu_8 \end{bmatrix}, \quad b_5 = \begin{bmatrix} (\mu_1 - \kappa_1)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_5 - \kappa_5)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 b_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\mu_2 - \kappa_2)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_6 - \kappa_6)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\mu_3 - \kappa_3)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_7 - \kappa_7)\delta_{amb} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_4 - \kappa_4)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_8 - \kappa_8)\delta_{amb} \end{bmatrix}, \quad b_9 = \begin{bmatrix} \max((\lambda_1 - \kappa_1)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_5 - \kappa_5)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 b_{10} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \max((\lambda_2 - \kappa_2)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_6 - \kappa_6)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_3 - \kappa_3)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_7 - \kappa_7)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_4 - \kappa_4)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_8 - \kappa_8)\delta_{amb}, 0) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x_{4k+1} = \max(x_{4k} + b_1\delta_{4k+1} + b_5, b_9) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1,$$

$$x_{4k+2} = \max(x_{4k+1} + b_2\delta_{4k+2} + b_6, b_{10}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1,$$

$$x_{4k+3} = \max(x_{4k+2} + b_3\delta_{4k+3} + b_7, b_{11}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1$$

$$x_{4k+4} = \max(x_{4k+3} + b_4\delta_{4k+4} + b_8, b_{12}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1$$

Las características de la zona de tráfico puede imponer otras regulaciones, tales como establecer cotas a las duraciones mínimas y máximas para los tiempos verde y rojo, así:

$\delta_{min.verde,i}$: cota mínima de duración de la luz en semáforo $i=1,2,3,4$.

$\delta_{max.verde,i}$: cota máxima de duración de la luz en semáforo $i=1,2,3,4$.

El problema de regulación de los semáforos puede representarse a través del siguiente modelo:

$$\text{Minimizar } J \quad (1)$$

sujeto a:

$$\delta_{min.verde,1} \leq \delta_{4k+1} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,1} \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (2)$$

$$\delta_{min.verde,2} \leq \delta_{4k+2} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,2} \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (3)$$

$$\delta_{min.verde,3} \leq \delta_{4k+3} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,3} \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (4)$$

$$\delta_{min.verde,4} \leq \delta_{4k+4} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,4} \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (5)$$

$$x_{4k+1} = \max(x_{4k} + b_1 \delta_{4k+1} + b_5, b_9) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (6)$$

$$x_{4k+2} = \max(x_{4k+1} + b_2 \delta_{4k+2} + b_6, b_{10}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (7)$$

$$x_{4k+3} = \max(x_{4k+2} + b_3 \delta_{4k+3} + b_7, b_{11}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (8)$$

$$x_{4k+4} = \max(x_{4k+3} + b_4 \delta_{4k+4} + b_8, b_{12}) \quad \text{para } k=0,1,\dots,N-1, \quad (9)$$

Si los carriles difieren en importancia al evaluar el nivel de congestión de los mismos, se representa el nivel de importancia del carril, fijando diferentes pesos o ponderaciones w_i , $i=1,\dots,8$. La función J a minimizar puede ser:

- **Suma (ponderada) de las longitudes medias de las colas en todos los carriles**

$$J_1 = \sum_{j=1}^8 w_j \frac{\sum_{i=1}^{4N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{4N} \delta_i} \quad (10)$$

- **Longitud (ponderada) media de las colas en el carril con mayores colas**

$$J_2 = \max_j w_j \frac{\sum_{i=1}^{4N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{4N} \delta_i} \quad (11)$$

- **Longitud (ponderada) de la cola más larga**

$$J_3 = \max_{i,j} w_j x_{ij} \quad (12)$$

- **Suma (ponderada) de los tiempos medios de espera considerando las colas de todos los carriles**

$$J_4 = \sum_{j=1}^8 \frac{w_j}{\lambda_j} \frac{\sum_{i=1}^{4N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{4N} \delta_i} \quad (13)$$

- **Tiempo (ponderado) medio de espera en el carril con mayor tiempo de espera**

$$J_5 = \max_j \frac{w_j}{\lambda_j} \frac{\sum_{i=1}^{4N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{4N} \delta_i} \quad (14)$$

Se puede analizar una sexta opción que consiste en considerar una combinación de los criterios anteriores. Esto nos lleva a un modelo multi-objetivo que podemos resolver tomando una combinación positiva de las distintas funciones objetivo.

$$J_6 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i J_i \quad (15)$$

donde los valores α_i corresponden a los pesos que se les dan a los distintos usuarios.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, conocido δ (vector de los tiempos de cada luz), la cantidad de autos en cada carril quede determinado mediante las ecuaciones (6) – (7) – (8) – (9). Denotamos por $x(\delta)$ la matriz de $4N$ filas y 8 columnas donde $x_{ij}(\delta)$ indica la cantidad de vehículos en el carril j en el momento del cambio de luz i .

Definimos:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv j(4) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Una forma más compacta de escribir el problema, sin tener que diferenciar entre las cuatro fases es la siguiente:

$$\text{Minimizar } J \quad (16)$$

sujeto a:

$$\Delta_{k1}\delta_{\min.\text{verde}1} + \Delta_{k2}\delta_{\min.\text{verde}2} + \Delta_{k3}\delta_{\min.\text{verde}3} + \Delta_{k4}\delta_{\min.\text{verde}4} \leq \delta_k - \delta_{\text{amb}} \leq \Delta_{k1}\delta_{\max.\text{verde}1} + \Delta_{k2}\delta_{\max.\text{verde}2} + \Delta_{k3}\delta_{\max.\text{verde}3} + \Delta_{k4}\delta_{\max.\text{verde}4} \quad \text{para } k=1, \dots, 4N \quad (17)$$

$$x_{kj} = \max[x_{k-1j} + (\lambda_j - \Delta_{kj}\mu_j)\delta_k + \Delta_{kj}(\mu_j - \kappa_j)\delta_{\text{amb}}, \max(\Delta_{kj}(\lambda_j - \kappa_j)\delta_{\text{amb}}, 0)] \quad \text{para } k=1, \dots, 4N \quad j=1, \dots, 8 \quad (18)$$

Como habíamos mencionado anteriormente, ya introducimos una aproximación extra al considerar las longitudes de cola continuas. Además, en la práctica, hay también alguna incertidumbre y variación en el tiempo de las tasas de llegada y de salida, lo que hace recomendable obtener una buena aproximación de la solución óptima que sea calculable en un tiempo corto y fácilmente ajustable a los cambios en los valores de los parámetros. De hecho [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] se trata de un problema de optimización con restricciones de complementariedad lineal (problema NP-duro), que involucra $36N$ variables, $8N$ restricciones suaves y $32N$ no suaves, lo que hace que sea muy costoso aplicar un algoritmo iterativo [de Schutter, B. (2002)]. Es por eso que para su solución proponemos un método híbrido que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves (método del gradiente discreto) [Lema, C. et al. (2010)].

3. NUEVO MODELO

En este modelo consideramos que en el semáforo hay sensores que permiten conocer la cantidad de autos en cada carril y, por ende, se puede decidir si, dado el tráfico, se mantiene el estado actual, por cuánto tiempo, o si debe cambiar la luz. Esta decisión permite menores tiempos de espera, pues elimina situaciones indeseadas como sería que no hubiera autos en el carril con la luz verde mientras otros carriles esperan.

Para la estrategia de cambio consideramos que si hay al menos r_2 vehículos esperando en carriles con luz roja, entonces es recomendable cambiar, así como si hay a lo más r_1 autos en los carriles a los que corresponde la luz verde. Dado que puede ser muy restrictivo asumir que los cambios de luces ocurren en estas situaciones,

suavizamos el modelo planteando que se minimiza el error cuadrático de aproximar la cantidad de autos en los momentos de cambio en los carriles en espera por r_2 y en los carriles de servicio por r_1 .

O sea si la cantidad de autos en el carril al que corresponde la luz verde en el momento i es $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij}$, debemos agregar a la función objetivo el cuadrado de la diferencia entre este valor y r_1 , pero solo si $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} > r_1$. Agregando la variable auxiliar ρ_i^{max} y la restricción $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{max}$, entonces al minimizar $(\rho_i^{max} - r_1)^2$ se cumple lo deseado. Realizando un razonamiento análogo para los autos que esperan por el cambio de luz para pasar y con la ayuda de la variable ρ_i^{min} , la penalidad quedaría

$$\sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \quad (19)$$

donde $\sum_j (1 - \Delta_{ij}) x_{ij} \geq \rho_i^{min}$, $i = 1, \dots, 4N$ $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{max}$, $i = 1, \dots, 4N$

Usando un parámetro c para controlar el peso que se le da a esta nueva función en el objeto a minimizar, el modelo final es:

$$\min F = J + c \left[\sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right] \quad (20)$$

sujeto a:

$$\Delta_{k1} \delta_{min.verde1} + \Delta_{k2} \delta_{min.verde2} + \Delta_{k3} \delta_{min.verde3} + \Delta_{k4} \delta_{min.verde4} \leq \delta_k - \delta_{amb} \leq \Delta_{k1} \delta_{max.verde1} + \Delta_{k2} \delta_{max.verde2} + \Delta_{k3} \delta_{max.verde3} + \Delta_{k4} \delta_{max.verde4} \quad \text{para } k=1, \dots, 4N \quad (21)$$

$$x_{kj} = \max[x_{k-1j} + (\lambda_j - \Delta_{kj} \mu_j) \delta_k + \Delta_{kj} (\mu_j - \kappa_j) \delta_{amb}, \max(\Delta_{kj} (\lambda_j - \kappa_j) \delta_{amb}, 0)] \quad \text{para } k=1, \dots, 4N \quad j=1, \dots, 8 \quad (22)$$

$$\sum_j (1 - \Delta_{ij}) x_{ij} \geq \rho_i^{min}, \quad i = 1, \dots, 4N \quad (23)$$

$$\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{max}, \quad i = 1, \dots, 4N \quad (24)$$

Para su solución proponemos un método híbrido que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves (método del gradiente discreto) [Lema, C. et al. (2010)].

4. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

4.1 Recocido simulado

El método de recocido simulado es una heurística en que se resuelve un problema de optimización $\min F(x) \ x \in M$, simulando el proceso de enfriamiento en el que a medida que baja la temperatura el movimiento de los átomos es menos probable [S. Kirkpatrick, S. et al. (1983)]. Dado un candidato a solución Ω el algoritmo busca en una vecindad del mismo, un punto con mejor evaluación de la función objetivo. De no existir, se toma un punto con peor evaluación como nueva solución con una cierta probabilidad. Esta probabilidad que se calcula a partir de la ley de Boltzman, es proporcional a la temperatura del sistema e inversamente proporcional a la variación de los valores de la función objetivo al pasar al nuevo punto. Cada cierto número de iteraciones se disminuye la temperatura del sistema. Los distintos criterios de parada son: encontrar un punto con un valor adecuado de la función objetivo y alcanzar una temperatura suficientemente baja en el sistema.

Sobre la base de lo explicado en esta sección, se formuló el algoritmo, cuyo pseudo-código presentamos a continuación.

ALGORITMO

- 0) Fijar $t_0 > 0$ (temperatura inicial), $\alpha \in (0,1)$ (parámetro del esquema de enfriamiento), Q (cantidad de pasos con igual temperatura), T (menor temperatura a alcanzar por el sistema). Escoger J_i , $i=1, \dots, 6$, y construir F , función objetivo del problema.
- 1) Construir un vector δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada. $F_{mejor} = F(x(\delta_0), \delta_0)$, $\delta_{mejor} = \delta_0$
temperatura $t = t_0$, $i=0$, $F_{anterior} = +\infty$
- 2) Mientras $t > T$,
 - 2.1) $q = 1$
 - 2.2) Mientras $q < Q$

2.2.1) Tomar δ un punto vecino de δ_i y hallar $x(\delta)$. Si $F(x(\delta), \delta) < F_{mejor}$, $\delta_{mejor} = \delta$, $F_{mejor} = F(x(\delta), \delta)$. Si $F(x(\delta), \delta) < F_{anterior}$ $\delta_{i+1} = \delta$, $F_{anterior} = F(x(\delta), \delta)$ e ir a **2.2.4)**

2.2.2) Generar r , número aleatorio de acuerdo a la ley uniforme en (0,1).

2.2.3) Si $r < \exp\left(\frac{F_{anterior} - F(x(\delta), \delta)}{t}\right)$, $\delta_{i+1} = \delta$ si no, $\delta_{i+1} = \delta_i$ $\delta_{anterior} = \delta_{i+1}$

y $F_{anterior} = F(x(\delta_{i+1}), \delta_{i+1})$, construir la solución $x(\delta_{i+1})$ asociada.

2.2.4) $q = q+1$ e ir a **2.2)**

2.3) $t = t \cdot \alpha$ e ir a **2).**

3) Mejor solución δ_{mejor} con valor de la función objetivo $F(x(\delta_{mejor}), \delta_{mejor})$. Fin

Pueden considerarse diversos criterios para definir el sistema de vecindades para ejecutar el algoritmo formulado. Consideramos el sistema de vecindades definido por el criterio: δ es vecino de δ^* si difieren en solo una componente y $\|\delta - \delta^*\| = 1$, es decir δ es vecino de δ^* si existe i tal que $\delta_i = \delta_i^* \pm 1$ y $\delta_j = \delta_j^*$ para todo $j \neq i$. En aras de mantener factibilidad se tiene en cuenta que el nuevo punto cumpla las restricciones en (17) ó (21). Claramente las vecindades así definidas, son un subconjunto discreto del conjunto de soluciones factibles, pero posibilita la rápida exploración de soluciones factibles.

4.2 Método del gradiente discreto

Teniendo en cuenta las restricciones (18) ó (22) podemos reducir el modelo implícitamente y calcular los valores de las funciones involucradas y sus derivadas de forma iterativa. Así resolvemos el problema con un algoritmo determinístico tipo quasi-Newton para funciones no suaves [Bagirov, A.M. et al. (2008)]. La estrategia es:

1. Escoger un vector inicial δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada y $k=0$. Fijar sucesiones $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k \rightarrow 0^+, k \rightarrow \infty$ y números $c_1 > c_2 > 0$.
2. Fijar $s=0$, $\delta_{k,s} = \delta_k$.

3. Buscar una dirección de descenso d , estimando ∇F por el método de gradiente discreto [Bagirov, A.M. et al. (2008)], con $(\alpha, \beta, \gamma, \zeta, c) = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k, c_1)$.
4. Si $|d| \leq \alpha_k$, $\delta_{k+1} = \delta_{k,s}$, $k = k+1$ ir a 2
5. Sea $\sigma_s = \operatorname{argmax}\{\sigma \geq 0, F(\delta_{k,s} + \sigma d/|d|) - F(\delta_{k,s}) \leq -c_2 \cdot \sigma/|d|\}$.
6. $\delta_{k,s+1} = \delta_{k,s} + \sigma_s d/|d|$.
7. $s = s+1$. Ir a 3.

La dirección de descenso se calcula de la siguiente manera

1. Fijar g , $|g_1|=1$ y fijar e , vértice del cubo unitario en $\mathbb{R}^n$.
2. Calcular el gradiente discreto $v_1 = \Gamma^i(\delta, g_1, e, \beta, \gamma, \zeta)$. $D = \{v_1\}$, $|g_i| > \sqrt{\frac{1}{2n}}$ $k=1$.
3. Hallar $w_k = \operatorname{argmin}\{|w| \mid w \in D\}$
4. Si $|w_k| < \alpha$ fin
5. Hallar $g_{k+1} = w_k/|w_k|$. Si $F(\delta + \gamma g_{k+1}) - F(\delta) \leq c\gamma|w_k|$ fin.
6. Calcular el gradiente discreto $v_{k+1} = \Gamma^i(\delta, g_{k+1}, e, \beta, \gamma, \zeta)$, $|g_i| > \sqrt{\frac{1}{2n}}$ $D = D \cup \{v_k\}$ e ir a 3.

El gradiente discreto $\Gamma^i(\delta, g_1, e, \beta, \gamma, \zeta)$ se calcula componente a componente mediante un esquema de diferencias divididas entre puntos consecutivos que difieren en $\zeta^j \beta$ unidades en la componente j , a lo que se agrega una combinación de las componentes $j \neq i$ para la i -ésima componente.

Este método arrojó en la mayoría de los casos mejores resultados que la heurística, pero a un coste computacional superior. Usando las ventajas de ambos algoritmos, proponemos buscar una buena aproximación a la solución mediante el método de recocido simulado. Luego se mejora el comportamiento en una vecindad del punto mediante el algoritmo quasi-Newton para funciones no suaves ya expuesto.

5. RESULTADOS COMPUTACIONALES

El algoritmo y el método de resolución propuestos han sido programados en MATLAB y se han implementado en un ordenador con procesador Intel Core i7, 950

que trabaja a 307 GHz. El programa permite variar los parámetros del algoritmo (temperatura inicial y final, número de repeticiones para una temperatura fija y estrategia de disminución de la temperatura), a fin de posibilitar el ajuste de sus valores en distintas situaciones de tráfico (por ejemplo, en cuanto a densidad de tráfico o número de ciclos).

Para que la extensión de la comunicación no sobrepase el límite fijado para las mismas, daremos los resultados obtenidos en ambos modelos sólo con las funciones objetivo: longitud (ponderada) de la cola más larga y tiempo (ponderado) medio de espera en el carril con mayor tiempo de espera.

Datos: 5 ciclos ($N=5$), tiempo de ámbar 3 sg. ($\delta_{amb}=3$ sg.)

Tabla 1: Parámetros

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4	Carril5	Carril6	Carril7	Carril8
Tasa-llegada (λ)	0.18	0.12	0.18	0.15	0.18	0.12	0.18	0.15
Tasa-sal. ver. (μ)	0.9	0.6	0.9	0.7	0.9	0.6	0.9	0.7
Tasa-sal. ámb. (κ)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

En cuanto a las cotas del tiempo de las luces, se tomaron:

$$\delta_{min,verde,1}=\delta_{min,verde,2}=\delta_{min,verde,3}=\delta_{min,verde,4}=10, \delta_{max,verde,1}=\delta_{max,verde,3}=30, \delta_{max,verde,2}=\delta_{max,verde,4}=20$$

Pesos $w=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Solución inicial: $\delta_0 = [20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15 \ 20 \ 15]$

Temperatura inicial $t_0 = 1000000000$

Función de reducción de temperatura $T_M = 0.5T_{M-1}$

Número de iteraciones con igual temperatura $Q = 100$

Criterio de parada $T < 0.000000001$

$r_1 = 2, \ r_2 = 8$.

Para $F = J_3 = \max_{i,j} w_j x_{ij}$, obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

$\delta = [20.5 \ 14.1 \ 17.5 \ 18.1 \ 16.7 \ 18.8 \ 19.5 \ 16.8 \ 17.9 \ 17.8 \ 18.2 \ 18.1 \ 15.9 \ 15.5 \ 13.2 \ 17.1 \ 20.9 \ 10.9 \ 19.9 \ 17.4]$

Tabla 2: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4	Carril5	Carril6	Carril7	Carril8
Ciclo1-Fase1	0.24	2.46	3.7	3.1	0.24	2.46	3.7	3.1
Ciclo1-Fase2	2.8	0.1	6.2	5.2	2.8	0.1	6.2	5.2
Ciclo1-Fase3	5.9	2.2	0.24	7.8	5.9	2.2	0.24	7.8
Ciclo1-Fase4	9.2	4.3	3.5	0.15	9.2	4.3	3.5	0.15
Ciclo2-Fase1	0.24	6.33	6.5	2.65	0.24	6.33	6.5	2.65
Ciclo2-Fase2	3.62	0.1	9.9	5.5	3.62	0.1	9.9	5.5
Ciclo2-Fase3	7.14	2.4	0.24	8.4	7.14	2.4	0.24	8.4
Ciclo2-Fase4	10.1	4.4	3.2	1	10.1	4.4	3.2	1
Ciclo3-Fase1	0.24	6.57	6.5	3.67	0.24	6.57	6.5	3.67
Ciclo3-Fase2	3.44	0.1	9.7	6.34	3.44	0.1	9.7	6.34
Ciclo3-Fase3	6.7	2,24	0.24	9.1	6.7	2.24	0.24	9.1
Ciclo3-Fase4	10	4.4	3.5	1	10	4.4	3.5	1
Ciclo4-Fase1	0.9	6.32	6.4	3.3	0.9	6.32	6.4	3.3
Ciclo4-Fase2	3.7	0.4	9.2	5.6	3.7	0.4	9.2	5.6
Ciclo4-Fase3	6.1	2	2	7.6	6.1	2	2	7.6
Ciclo4-Fase4	9.2	4	5.1	0.15	9.2	4	5.1	0.15
Ciclo5-Fase1	0.24	6.53	8.9	3.28	0.24	6.53	8.9	3.28
Ciclo5-Fase2	2.2	2.8	10.84	4.9	2.2	2.8	10.84	4.9
Ciclo5-Fase3	5.8	5.2	0.24	7.9	5.8	5.2	0.24	7.9
Ciclo5-Fase4	8.93	7.27	3.37	0.15	8.93	7.27	3.37	0.15

Peor cola: $\cong 11$ autos. Tiempo computacional: 1.3 sg.

Para $F = J_3 + c \left[\sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

$\delta = [18.5 \ 10 \ 20.5 \ 18 \ 16.2 \ 16.9 \ 16.6 \ 17.1 \ 16.1 \ 15.7 \ 16.1 \ 16.4 \ 15.4 \ 14.1 \ 15.9 \ 15.7 \ 14.8 \ 16.2 \ 16.8 \ 14]$

Tabla 3: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4	Carril5	Carril6	Carril7	Carril8
Ciclo1-Fase1	0.24	2.22	3.33	2.77	0.24	2.22	3.33	2.77
Ciclo1-Fase2	2.1	0.1	5.13	4.27	2.1	0.1	5.13	4.27
Ciclo1-Fase3	5.73	2.52	0.24	7.35	5.73	2.52	0.24	7.35
Ciclo1-Fase4	9	4.7	3.5	0.15	9	4.7	3.5	0.15
Ciclo2-Fase1	0.24	6.63	6.4	2.58	0.24	6.63	6.4	2.58
Ciclo2-Fase2	3.29	0.1	9.4	5.1	3.29	0.1	9.4	5.1
Ciclo2-Fase3	6.28	2.1	0.24	7.6	6.28	2.1	0.24	7.6
Ciclo2-Fase4	9.36	4.1	3.32	0.15	9.36	4.1	3.32	0.15
Ciclo3-Fase1	0.24	6	6.2	2.6	0.24	6	6.2	2.6
Ciclo3-Fase2	3	0.1	9.1	4.92	3	0.1	9.1	4.92
Ciclo3-Fase3	6	2	0.24	7.33	6	2	0.24	7.33
Ciclo3-Fase4	8.9	4	3.2	0.15	8.9	4	3.2	0.15
Ciclo4-Fase1	0.24	5.8	6	2.46	0.24	5.8	6	2.46
Ciclo4-Fase2	2.78	0.52	8.5	4.6	2.78	0.52	8.5	4.6
Ciclo4-Fase3	5.64	2.43	0.24	7	5.64	2.43	0.24	7
Ciclo4-Fase4	8.47	4.32	3.1	0.15	8.47	4.32	3.1	0.15
Ciclo5-Fase1	0.24	6.1	5.74	2.38	0.24	6.1	5.74	2.38
Ciclo5-Fase2	3.15	0.1	8.65	4.8	3.15	0.1	8.65	4.8
Ciclo5-Fase3	6.18	2.1	0.24	7.32	6.18	2.1	0.24	7.32
Ciclo5-Fase4	8.7	3.76	2.77	1.4	8.7	3.76	2.77	1.4

Peor cola: $\cong 9$ autos. Tiempo computacional: 6 sg.

Con este modelo hemos obtenido buenos resultados ya que las colas son más cortas que en el modelo anterior (peor cola aproximadamente 9 autos). Además observamos que se evitó la congestión con períodos largos sin cambio de luz cuando la cantidad de tráfico es grande y la situación no deseada de que haya largas colas de vehículos esperando, mientras que en la vía con luz verde sean muy pocos los que están pasando.

Para $F = J_5 = \max_j \frac{w_j \sum_{i=1}^{4N} x_{ij} \delta_i}{\lambda_j \sum_{i=1}^{4N} \delta_i}$, obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

$\delta = [13.3 \ 10.2 \ 11.1 \ 12.8 \ 21 \ 12.7 \ 10 \ 14.2 \ 10.8 \ 12.1 \ 23.1 \ 13.2 \ 16.5 \ 16.8 \ 15.3 \ 16.6 \ 19.7 \ 17.8 \ 12.6 \ 19.9]$

Tabla 4: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4	Carril5	Carril6	Carril7	Carril8
Ciclo1-Fase1	0.24	1.6	2.4	2	0.24	1.6	2.4	2
Ciclo1-Fase2	2.1	0.1	4.24	3.54	2.1	0.1	4.24	3.54
Ciclo1-Fase3	4.1	1.4	0.24	5.2	4.1	1.4	0.24	5.2
Ciclo1-Fase4	6.4	2.9	2.55	0.15	6.4	2.9	2.55	0.15
Ciclo2-Fase1	0.24	5.46	6.34	3.3	0.24	5.46	6.34	3.3
Ciclo2-Fase2	2.51	0.9	8.6	5.2	2.51	0.9	8.6	5.2
Ciclo2-Fase3	4.32	2.1	3.82	6.7	4.32	2.1	3.82	6.7
Ciclo2-Fase4	6.9	3.8	6.4	0.7	6.9	3.8	6.4	0.7
Ciclo3-Fase1	1.49	5.1	8.3	2.3	1.49	5.1	8.3	2.3
Ciclo3-Fase2	3.66	0.8	10.5	4.1	3.66	0.8	10.5	4.1
Ciclo3-Fase3	7.82	3.58	0.24	7.57	7.82	3.58	0.24	7.57
Ciclo3-Fase4	10.2	5.17	2.62	2.1	10.2	5.17	2.62	2.1
Ciclo4-Fase1	0.74	7.14	5.6	4.6	0.74	7.14	5.6	4.6
Ciclo4-Fase2	3.77	0.56	8.6	7.1	3.77	0.56	8.6	7.1
Ciclo4-Fase3	6.53	2.4	0.24	9.4	6.53	2.4	0.24	9.4
Ciclo4-Fase4	9.52	4.4	3.2	2.1	9.52	4.4	3.2	2.1
Ciclo5-Fase1	0.24	6.76	6.77	5	0.24	6.76	6.77	5
Ciclo5-Fase2	3.44	0.1	10	7.7	3.44	0.1	10	7.7
Ciclo5-Fase3	5.7	1.58	3.3	9.58	5.7	1.58	3.3	9.58
Ciclo5-Fase4	10.3	4.62	7.8	0.15	10.3	4.62	7.8	0.15

Peor cola: $\cong 10.5$ autos. Valor de la función objetivo: 49 sg. Tiempo computacional: 5.6 sg.

Para $F = J_5 + c \left[\sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{4N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

$\delta = [10 \ 15.6 \ 10 \ 14.4 \ 15 \ 13 \ 13.2 \ 14.5 \ 15.5 \ 14.2 \ 20.5 \ 15.8 \ 18.3 \ 16 \ 15.6 \ 19.9 \ 14.2 \ 12.6 \ 10.4 \ 10]$

Tabla 5: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4	Carril5	Carril6	Carril7	Carril8
Ciclo1-Fase1	0.24	1.2	1.8	1.5	0.24	1.2	1.8	1.5
Ciclo1-Fase2	3	0.1	4.6	3.8	3	0.1	4.6	3.8
Ciclo1-Fase3	4.84	1.26	0.24	5.34	4.84	1.26	0.24	5.34
Ciclo1-Fase4	7.43	3	2.8	0.15	7.43	3	2.8	0.15
Ciclo2-Fase1	0.24	4.8	5.5	2.4	0.24	4.8	5.5	2.4
Ciclo2-Fase2	2.58	0.1	7.9	4.35	2.58	0.1	7.9	4.35
Ciclo2-Fase3	5	1.65	0.73	6.34	5	1.65	0.73	6.34
Ciclo2-Fase4	7.58	3.4	3.35	0.15	7.58	3.4	3.35	0.15
Ciclo3-Fase1	0.24	5.26	6.1	2.5	0.24	5.26	6.1	2.5
Ciclo3-Fase2	2.8	0.1	8.7	4.61	2.8	0.1	8.7	4.61
Ciclo3-Fase3	6.48	2.52	0.24	7.68	6.48	2.52	0.24	7.68
Ciclo3-Fase4	9.32	4.41	3.1	0.8	9.32	4.41	3.1	0.8
Ciclo4-Fase1	0.24	6.6	6.37	3.55	0.24	6.6	6.37	3.55
Ciclo4-Fase2	3.13	0.4	9.27	6	3.13	0.4	9.27	6
Ciclo4-Fase3	6	2.27	0.43	8.3	6	2.27	0.43	8.3
Ciclo4-Fase4	9.9	4.9	4.37	0.15	9.9	4.9	4.37	0.15
Ciclo5-Fase1	2.1	6.6	7	2.27	2.1	6.6	7	2.27
Ciclo5-Fase2	4.36	2	9.2	4.2	4.36	2	9.2	4.2
Ciclo5-Fase3	6.23	3.28	4.12	5.73	6.23	3.28	4.12	5.73
Ciclo5-Fase4	8	4.5	5.9	2	8	4.5	5.9	2

Peor cola: $\cong 10$ autos. Valor de la función objetivo: 47 sg. Tiempo computacional: 7.6 sg.

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

- En este trabajo hemos estudiado un problema de control óptimo de semáforos para un cruce de dos calles con los dos sentidos de circulación, con dos carriles en cada sentido, y con un semáforo que regula la circulación en cada carril, por tanto un cruce regulado por ocho semáforos en el que en cada ciclo existen cuatro fases.
- Hemos presentado dos modelos para dicho problema, uno en el cual los tiempos de las luces son variables, pero sólo dependen de los flujos de llegada, y otro en el que se considera que en los semáforos hay sensores que permiten conocer la cantidad de autos en cada carril y, por ende, se puede decidir si, dado el tráfico, se mantiene el estado actual, por cuánto tiempo, o si debe cambiar la luz
- Hemos propuesto un método híbrido de solución donde se combina la filosofía de recocido simulado y un método quasi-Newton para problemas de optimización no suaves. Obtuvimos resultados bastante buenos (las colas son bastante cortas), con un tiempo computacional no demasiado grande, ya que mediante la heurística fuimos capaces de explorar la región de soluciones “escapando” de extremos locales, y mediante el algoritmo exacto se mejoró considerablemente la solución obtenida a través de la heurística.
- Como cabía esperar, los resultados obtenidos cuando se usa el modelo en el que existen sensores en los semáforos, son mejores (las colas son más cortas y el tiempo de espera es inferior), permitiendo una reducción del gasto de combustible y como consecuencia de la contaminación medioambiental. Además el tiempo computacional es sólo sensiblemente superior.
- El modelo que hemos diseñado y aplicado a la intersección regulada, impregna a nuestra investigación de un carácter *interdisciplinario* al incorporar no sólo referencias económicas y sociales sino también los aspectos medioambientales que pretende resolver, como la congestión, la generación de accidentes, los ruidos y la contaminación atmosférica.

- Corresponde a las Autoridades Públicas basarse en esta investigación para *tomar decisiones* en lo tocante a una buena regulación del tráfico.
- En el futuro continuaremos con la experimentación computacional para validar la conducta del algoritmo propuesto y modelaremos otros tipos de intersecciones reguladas por ocho semáforos pero con seis fases en cada ciclo, como la existente en la ciudad de A Coruña en el cruce de la avenida de Arteixo con la Ronda de Outeiro.
- También nos proponemos, en dichas intersecciones, la experimentación con datos reales de flujo de vehículos, incluyendo en nuestro estudio diferencias entre los distintos carriles, un mayor número de ciclos y en el caso del problema multiobjetivo, vectores de peso que ponderen más un objetivo que otro.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DE SCHUTTER, B. and DE MOOR, B. (1998) “Optimal traffic light control for a single intersection”. *European Journal of Control*, 4, 3, pp. 260-276.
- DE SCHUTTER, B. (2002) “Optimizing acyclic traffic signal switching sequences through an extended linear complementarity problem formulation”, *European Journal of Operational Research*, 139, 2, pp. 400-415.
- LEMA, C. et al. (2010) “Un nuevo modelo para el problema de control óptimo de semáforos”. *Anales de ASEPUMA* nº 18: 601, pp. 601.1-601.19.
- S. KIRKPATRICK, S.; GELATT, J.R. and VECCHI, M.P. (1983) “Optimization by simulated annealing”. *Science*, 220, pp. 671-680.
- BAGIROV, A.M.; KARASÖZEN, B. and SEZER, M. (2008) “Discrete gradient method: Derivative-free method for non smooth optimization”, *Journal of Optimization theory and applications*, 137, 2, pp. 317-334.