

Construcción de indicadores sintéticos: una aproximación para maximizar la discriminación

Blancas Peral, Francisco J.

Contreras Rubio, Ignacio

Ramírez Hurtado, José M.

*Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide*

RESUMEN

La construcción de indicadores sintéticos basados en el criterio del beneficio de la duda se caracterizan por determinar de manera endógena el vector de ponderaciones con el que se agregarán los indicadores individuales. El presente trabajo propone un modelo de agregación que intenta salvar las principales críticas realizadas a este tipo de procedimientos: la selección de vectores diferentes para cada alternativa, lo que dificulta la comparación de los resultados finales, y la aparición de múltiples empates. Para ello, se propone un procedimiento que, manteniendo la esencia de los modelos de agregación basados en DEA, concluye determinando un vector de pesos común para todas las alternativas y en el que la discriminación entre los valores finales del indicador sintético se incluye como objetivo del procedimiento.

Palabras clave: Indicadores sintéticos, DEA, agregación multiplicativa

Área temática: Aspectos Cuantitativos del Fenómeno Económico

ABSTRACT

Composite indicators constructed on the basis of the benefit of the doubt criterion are characterized by endogenously determined vectors of weights. In this paper, a new procedure to construct composite indicators is proposed which tries to overcome the main weakness of this family of procedures: the obtention of an individual weighting vector for each alternatives, which makes the comparisons between alternatives difficult, and multiple ties. A new procedure is proposed which, keeping the essence of DEA-inspired procedures, determines a common weighting-vector to evaluate the complete set of alternatives and includes the discrimination between alternatives as an objective of the procedure.

Keywords: Composite indicators, DEA, multiplicative aggregation.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años los indicadores sintéticos (IS) se han configurado como uno de los instrumentos de medición analítica más utilizados en la práctica en multitud de campos de la realidad social. Cada vez más, los indicadores sintéticos son aceptados como herramientas útiles para la toma de decisiones y la comunicación de información. De acuerdo con el glosario de términos estadísticos de la OCDE, entendemos por indicador sintético aquella combinación (o agregación) matemática de los indicadores que representan los distintos componentes del concepto que se pretende evaluar a partir de un sistema de partida, proporcionando una evaluación multidimensional del mismo (Saisana y Tarantola, 2002).

Son múltiples las razones que justifican el uso de indicadores sintéticos. De manera breve puede resumirse en su capacidad para facilitar la interpretación de la información por parte de los usuarios y evaluar de forma sencilla fenómenos complejos y multidimensionales. En cualquier caso, sea cual sea la finalidad para la que se obtiene un indicador sintético, su obtención no debe constituir un fin en sí mismo sino una herramienta que facilite la decisión.

Desde un punto de vista técnico, la construcción de un IS implica establecer un procedimiento matemático para agregar un conjunto de indicadores individuales, a los que se suele referir como sub-indicadores, para medir fenómenos multidimensionales que no podrían representarse a través de una única medida. Una revisión completa de los procedimientos de construcción de indicadores puede verse, entre otros, en Nardo et al. (2005) and Saisana y Tarantola (2002).

El procedimiento de agregación de información para la construcción de indicadores sintéticos supone, implícitamente, la ejecución de un conjunto de acciones por parte del analista. Es decir, para la formulación de un indicador sintético el analista debe adoptar una serie de decisiones subjetivas que pueden determinar en cierta medida los resultados

obtenidos. La elección de los indicadores de partida, la forma de agruparlos, el uso o no de un método de normalización de los datos, la elección de dicho método o la elección del esquema de ponderaciones constituyen aspectos subjetivos aportados por el analista.

El mayor o menor grado de subjetividad asociado a los valores de los indicadores sintéticos han fundamentado multitud de críticas. A pesar de ello, los indicadores sintéticos no han dejado de ser usados en la práctica. Para contrarrestar los aspectos críticos asociados al grado de subjetividad, se han desarrollado metodologías que permiten obtener indicadores sintéticos reduciendo el número de decisiones que deben ser adoptadas por parte del analista. Véanse, entre otros, Munda (2005), Munda y Nardo (2009). Sin duda, la fase en la que cada indicador individual es ponderado y agregado para determinar el valor único que representará a cada alternativa es el paso en el que la subjetividad del analista puede afectar más al proceso (Saisana y Tarantola, 2002), recibiendo recientemente una creciente atención en la literatura.

Así, la existencia de multitud de métodos distintos para obtener indicadores sintéticos, hace que la elección del más adecuado sea una tarea difícil. En cada caso, la decisión final debe depender del propósito con el que se construya la medida sintética así como de la naturaleza de la materia evaluada (Ginsberg et al., 1986; Esty et al., 2005). En este estudio, nos centramos en aquellos casos en los que el indicador sintético se obtiene con el propósito de proporcionar al usuario la mayor cantidad posible de información contenida en el sistema de partida. Asimismo, los valores del indicador sintético deben permitir obtener un ranking de las alternativas analizadas, de forma que el usuario sea capaz de discriminar entre ellas identificando sus principales características. Finalmente, puesto que los usuarios finales no suelen ser expertos en la materia, los valores del indicador sintético deben ser sencillos y fáciles de interpretar.

Para que el indicador sintético cumpla este propósito, la metodología empleada para su obtención deberá cumplir los siguientes requisitos:

- Minimizar la cantidad de información perdida al realizar la agregación, de forma

que el indicador sintético sea una medida multidimensional lo más completa posible.

- No permitir la compensación total entre unos indicadores iniciales y otros, de manera que una unidad que presente un mal resultado en algunas de las dimensiones estratégicas no pueda ser compensado por un buen resultado en otro. Así, buscamos que el indicador sintético ofrezca una mejor evaluación para aquellas unidades que presenten una situación equilibrada en todos los aspectos evaluados por el sistema inicial.
- Reducir la subjetividad asociada al indicador sintético reduciendo al mínimo el papel del analista, de forma que sus decisiones influyan lo menos posible sobre los resultados finales.
- Permitir la discriminación total entre las alternativas consideradas, reduciendo al mínimo el número de empates entre ellas.

Para la formulación de una metodología adecuada que se ajuste a estos requisitos, vamos a tomar como referencia los procedimientos que se encuadran dentro del enfoque del beneficio de la duda (Cherchye y Kuosmanen, 2002; Cherchye et al., 2007). La principal ventaja de esta familia de procedimientos reside en la posibilidad de determinar el esquema de ponderaciones con el que se agrega la información de manera endógena, sin que exista una decisión subjetiva del analista. No obstante, los modelos presentan una serie de limitaciones que deben tenerse en cuenta en su aplicación.

En primer lugar, el hecho de que cada unidad sea evaluada con un vector de pesos propio, aquel con el que alcanza su máxima valoración es, simultáneamente, la principal *ventaja* y aspecto discutible de este tipo de procedimientos. La dificultad de hacer comparaciones entre alternativas o la valoración con esquemas de ponderaciones que centran su valoración en unos pocos indicadores para obtener el indicador sintéticos son aspectos que deben considerarse.

En segundo lugar, si el objetivo final es obtener una ordenación de las alternativas a partir de los valores agregados, es frecuente en este tipo de procedimientos la aparición de numerosos empates, en particular con alternativas que alcanzan el máximo valor posible. Numerosos trabajos han investigado en este aspecto, en particular en el contexto de los modelos DEA (vease, entre otros, Despotis, 2002).

En este contexto, nuestro objetivo es proponer un nuevo procedimiento inspirado en los modelos de beneficio de la duda que resuelva, en la medida de lo posible, las limitaciones expuestas anteriormente. El resto del trabajo presenta la formulación de este procedimiento y se estructura como sigue. En la Sección 2 se discute y presenta la elección del procedimiento de agregación y ponderación que sirven de base para que el indicador sintético cumpla sus objetivos. Una vez realizado esto, en la Sección 3 se completa el modelo propuesto para que el indicador sintético permita inducir una ordenación de las alternativas evaluadas con el menor número de empates posibles. Para ilustrar el funcionamiento del modelo, en la Sección 4 presentamos un ejemplo numérico en el que se propone la evaluación de las cadenas de franquicias que operan en España en el Sector de comida rápida, con el objetivo de obtener un ranking de enseñas que permita a un inversor interesado valorar la información existente y decidir la enseña a la que desea adherirse. La Sección 5 resume las principales conclusiones.

2. INDICADORES SINTÉTICOS MULTIPLICATIVOS CON ELECCIÓN LIBRE DE PESOS

De acuerdo con lo establecido por la OCDE (Nardo et al., 2005; OECD, 2008), entre los pasos básicos que implica la construcción de indicadores sintéticos, la elección del método de agregación y ponderación de los indicadores iniciales es lo que principalmente diferencia a unas metodologías de otras. En esta sección, planteamos el análisis de esta cuestión de forma que la metodología propuesta cumpla los requisitos exigidos.

Consideramos un conjunto de n unidades que desean ser evaluadas mediante la construcción de un indicador sintético a partir de m indicadores conocidos. Por I_{ij} denotamos el indicador j -ésimo asociado a la unidad i , con $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ y $j \in J = \{1, \dots, m\}$. Por IS_i denotamos el indicador sintético asociado a la unidad i . Consideramos que los valores están normalizados de manera que sean comparables.

Por lo que respecta a la regla de agregación, a pesar de constituir uno de los principales problemas en la obtención de indicadores sintéticos (den Butter y von den Eyden, 1998), no se disponen de criterios objetivos que permitan elegir el método más apropiado (Kang, 2002). Los estudios realizados en este campo, comparan de forma empírica los distintos métodos de agregación y determinan las condiciones bajo las cuales el uso de cada uno de ellos resulta más adecuado (Ebert y Welsch, 2004). En este contexto, basamos nuestra elección del procedimiento de agregación en la utilización de criterios cualitativos (Zhou et al., 2006) tales como los fijados como requisitos de la medida sintética.

Entre los distintos procedimientos de agregación posibles, centramos nuestra atención en los dos más utilizados en la práctica (OCDE, 2008): la agregación aditiva ponderada (AAP) y el método del producto ponderado (MPP).

La AAP, también conocido como el método de la suma ponderada, es uno de los más utilizados para construir indicadores sintéticos. Su formulación es la siguiente,

$$IS_i = \sum_{j \in J} w_j I_{ij}, \quad (1)$$

donde w_j denota la ponderación asignada al indicador j -ésimo.

La utilización de esta metodología en la mayoría de los trabajos existentes es debida a su transparencia y su fácil aplicación. Sin embargo, su utilización implica asumir unos supuestos teóricos que pueden ser discutibles. En primer lugar, la AAP implica que los indicadores iniciales son variables preferentemente independientes (Munda y Nardo, 2005). Esta condición, implica que la función aditiva que define el indicador sintético permite valorar la contribución marginal de cada variable separadamente. Así, se considera que la adición de todas las contribuciones marginales da lugar al valor total del indicador

sintético. Por ello, esta regla de agregación asume la no existencia de algún fenómeno de sinergia o conflicto entre los distintos aspectos cuantificados en el sistema.

Otro problema asociado a la AAP es, tal como muestran Munda y Nardo (2003), que las ponderaciones representan los ratios de intercambio entre los indicadores iniciales, lo que es inconsistente con la interpretación de los pesos como medida de la importancia relativa de cada indicador inicial. Además, los indicadores sintéticos lineales creados de forma aditiva asumen siempre la completa compensabilidad entre los indicadores de partida. Este carácter compensatorio hace referencia a la posibilidad de que en un determinado caso las desventajas presentadas en un grupo de indicadores puedan ser compensadas por una mejor situación en otros. De esta forma, el indicador finalmente obtenido muestra el resultado neto que se obtiene al tener en cuenta las compensaciones que se producen entre los indicadores presentes en el sistema. No obstante, desde un punto de vista normativo, en algunos casos como el que nos ocupa este alto grado de compensación no es deseable.

Finalmente, podemos decir que la AAP asume que los valores de los indicadores del sistema vienen expresados en una escala ratio o intervalo, sin ninguna incertidumbre asociada. Sin embargo, raramente ocurre esto en la práctica siendo necesario en algunas ocasiones donde los valores son arbitrariamente definidos al tratarse de indicadores originariamente valorados mediante escala ordinales (Nicoletti et al., 2000).

Una segunda regla de agregación utilizada en la práctica es el MPP cuya formulación viene dada por la siguiente expresión

$$IS_i = \prod_{j \in J} I_{ij}^{w_j}. \quad (2)$$

Es importante notar que, dada la definición del indicador de forma multiplicativa, los indicadores iniciales deben presentar necesariamente valores no nulos.

Como se muestra en Ebert y Welsch (2004), los indicadores sintéticos obtenidos mediante formulación son caracterizados como significativos puesto que la ordenación asociada a los valores del indicador sintético es independiente de las unidades de medidas

elegidas para los indicadores iniciales. Se muestra, por tanto, que el MPP presenta, desde un punto de vista teórico, mejores propiedades que la AAP.

Por otra parte, la regla de agregación asociada al MPP admite un menor grado de compensación entre los indicadores que la AAP. Como hemos visto, los indicadores que agregan mediante una suma ponderada presentan un grado de compensación constante entre todos los indicadores. Sin embargo, el grado de compensación en la agregación geométrica es más pequeño entre los indicadores que presentan menores valores. Asimismo, este procedimiento de agregación penaliza en gran medida a aquellas unidades que presentan valores bajos en algunos de los indicadores iniciales, asignándoles un valor muy bajo en el indicador sintético final (Yoon y Hwang, 1995).

Teniendo en cuenta estos aspectos, podemos decir que un indicador sintético obtenido mediante el MPP facilita la interpretación de los resultados y el análisis de la ordenación final de las unidades analizadas con el objetivo de realizar propuestas de mejora en la posición alcanzada por cada una de ellas. En este sentido, la regla de agregación hace que un cambio en un indicador no tenga siempre el mismo impacto sobre el valor del indicador sintético y, por tanto, sobre la posición alcanzada por una unidad en la ordenación final. En concreto, una modificación del valor de los indicadores que inicialmente presentan un menor valor provocara una mayor variación en el valor del indicador sintético que las modificaciones efectuadas en indicadores con valores altos. En consecuencia, las unidades analizadas se ven incentivadas a mejorar los aspectos evaluados por los indicadores en los que registran una mayor debilidad y, por tanto, mejorar su situación respecto al resto.

Finalmente, podemos destacar que los estudios empíricos realizados muestran claramente que el MPP supone una menor pérdida de información a la hora de transformar la matriz o sistema inicial en el vector que definen los valores del indicador sintético, resultado que es consistente con los análisis teóricos presentados en este campo (Ebert y Welsch, 2004; Zhou y Ang, 2009; Zhou et al., 2010).

Llegados a este punto, podemos afirmar que el análisis previo muestra que la regla

de agregación más adecuada para nuestro estudio es MPP.

En lo que respecta a la ponderación, el esquema de asignación de pesos que proponemos se basa en el criterio del beneficio de la duda. Inspirado en Análisis Envolvente de Datos (DEA) (Charnes et al., 1978), permite a cada unidad elegir aquel vector de ponderaciones con el que alcanza su máxima valoración con un conjunto de restricciones comunes que aseguran que ninguna unidad pueda superar un valor prefijado, y que en el caso de los indicadores contruidos de manera multiplicativa es igual al número e .

El modelo inicial que permite obtener la valoración óptima de cada alternativa considerada individualmente es el propuesto en Zhou et al. (2010). De esta manera, la evaluación individual de cada unidad se obtiene resolviendo un problema de optimización tal que,

$$\begin{aligned} IS_o^* = & \text{Max} \quad \prod_{j \in J} I_{oj}^{w_{oj}} \\ \text{s.t.} \quad & \prod_{j \in J} I_{ij}^{w_{oj}} \leq e, \quad i \in I \\ & w_{oj} \geq \varepsilon, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (3)$$

Donde ε denota un infinitésimo que asegura la no negatividad de los pesos. El modelo (3) que permite determinar el indicador de la unidad o . Es importante destacar que el modelo ha de resolverse n veces, uno por cada unidad que desea evaluarse y como cada unidad selecciona sus propios pesos para ser evaluado, por lo que los vectores llevan un segundo subíndice que hace referencia a la unidad evaluada.

La anterior evaluación permite determinar un conjunto de n valores del indicador sintético (uno para cada alternativa), cada uno con su propio vector de pesos. Dado que el modelo (3) es un problema de programación no lineal, para facilitar su solución de manera directa, es posible obtener un problema de programación lineal equivalente tomando logaritmos base e . Esto implica que, para poder realizar esta transformación, es necesario que los indicadores iniciales vengan medidos en una escala de valores no negativos y superiores a la unidad, algo que puede lograrse con un procedimiento adecuado de normalización mínima-máxima (también denominada técnica de reescalamiento). De

esta manera, la solución del modelo (3) puede obtenerse equivalentemente resolviendo el siguiente problema de programación lineal,

$$\begin{aligned} IS_o^* = \quad & \text{Max} \quad \sum_{j \in J} w_{oj} \ln I_{oj} \\ \text{s.t.} \quad & \prod_{j \in J} w_{oj} I_{ij} \leq 1, \quad i \in I \\ & w_{oj} \geq \varepsilon, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (4)$$

La flexibilidad con la que se fijan los pesos puede hacer que se obtengan resultados extremos, que podría llevar a la obtención de indicadores sintéticos basados en un único indicador inicial, la asignación de una mayor ponderación a indicadores iniciales de importancia secundaria o la no consideración de indicadores importantes al otorgarles un peso nulo. Estas situaciones extremas se producen sobre todo en aquellos casos en los que el sistema inicial está compuesto por un alto número de indicadores. Es por esto que este tipo de modelos, tal y como están definidos, sean poco operativos para este tipo de aplicaciones empíricas y que requieran, para salvar tal dificultad, de la inclusión de restricciones adicionales al valor de los pesos individuales que limite la variabilidad de los mismos, lo que supone, necesariamente, una carga adicional de subjetividad al procedimiento. Además, el carácter específico de los pesos obtenidos, hace difícil realizar un análisis comparativo entre unidades de forma similar al realizado bajo un sistema de ponderación común.

Otro problema que se presenta frecuentemente en este tipo de procedimientos con elección libre de pesos es la aparición de numerosos empates entre unidades, en particular para aquellas unidades que alcanzan el valor máximo permitido, de forma que no pueda discriminarse entre todas ellas.

La propuesta que se realiza en este trabajo intenta salvar estas dos dificultades manteniendo, en la medida de lo posible, la esencia de la filosofía del criterio del beneficio de la duda: la selección endógena del vector de ponderaciones. Proponemos, por tanto, un procedimiento para la construcción de indicadores sintéticos con determinación endógena de pesos pero que termina evaluando al conjunto de unidades con un esquema de ponde-

raciones común y que incluye, como objetivo, elaborar una ordenación de alternativas lo más completa posible, entendiendo como tal un orden con el menor número de empates posible (es importante destacar que no puede garantizarse en ningún caso la construcción de un orden completo, piénsese, por ejemplo, en que la matriz de datos incluya dos unidades con indicadores individuales idénticos).

3. PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR UNA ORDENACIÓN DE LAS ALTERNATIVAS

Como se vio en la anterior sección, las principales debilidades de los indicadores basados en el criterio del beneficio de la duda son dos. Por un lado, la dificultad de hacer comparaciones entre las alternativas, en tanto a cada una de ellas se asocia un vector de pesos individual y propio que pueden ser muy diferentes entre sí. Por otro lado, la frecuente existencia de empates en la valoración de alternativas, en particular entre aquellas que alcanzan el valor máximo establecido por el indicador (valor e en el modelo (3) y 1 en el modelo (4)), lo que dificulta inducir una ordenación de las mismas a partir del indicador sintético.

El procedimiento que proponemos pretende salvar estas dos dificultades en la construcción de indicadores con elección libre de pesos. Se propone un modelo que asocia a cada alternativa un valor del indicador sintético elaborado con un esquema común de ponderaciones y estableciendo, como objetivo prioritario, la posibilidad de inducir una ordenación de las alternativas evaluadas lo más completa posible, esto es, que implique el menor número posible de empates.

Existen varios procedimientos para determinar una valoración con un vector de pesos común a todas las alternativas para los procedimientos basados en DEA. El procedimiento que proponemos determina la solución que minimiza la distancia al valor ideal, valor que viene determinado en el modelo (4), y que representa el valor máximo que indivi-

dualmente puede alcanzar cada unidad. Si denotamos por $IS_i^C = \prod_{j \in J} IS_{ij}^{w_j^C}$ el indicador de la unidad i elaborado con un esquema de pesos común a todas las unidades, donde $w^C = (w_1^C, \dots, w_m^C)$ representa dicho vector de ponderaciones, éstos se determinan como la solución del siguiente problema de minimización

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in I} (IS_i^* - IS_i^C)^p \\ \text{s.t.} \quad & IS_i^C \leq e, \quad i \in I \\ & w_j^C \geq \varepsilon, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (5)$$

Donde p denota un parámetro tal que $p \geq 1$, que determina la distancia utilizada en el cómputo de la solución. Cuando $p = 1$ el problema determina la mínima distancia total del conjunto de alternativas a sus respectivos valores ideales si se considera la métrica l_1 . Con $p = 2$ se utiliza la distancia euclídea y $p = \infty$ equivale a minimizar la distancia de aquella alternativa más alejada de su valor ideal.

Este procedimiento, si bien determina un vector de pesos comunes, permite libertad en la elección de las ponderaciones de cada indicador individual (mas allá de la obligación de no ser negativos). Es usual establecer restricciones a los valores que determinados pesos o valores virtuales (producto de peso por el valor de indicador) debe tomar, si bien estas restricciones son elementos subjetivos que deben ser decididos por el analista.

Consideramos que a partir de los indicadores sintéticos calculados para cada alternativa IS_i^C , se induce un orden de las mismas. Representaremos dicho orden a través de un vector de posiciones en el que el valor 1 se asocia a la alternativa mejor valorada y n a la peor. En caso de empates, a todas las alternativas empatadas se asigna el mismo valor, igual a la media aritmética de los valores que ocupan. Esto es, dos alternativas que empaten, por ejemplo, en la segunda y tercera posición reciben un valor 2.5. De manera análoga pueden representarse situaciones de empates entre tres o más alternativas.

Para construir un orden a partir de los valores agregados, y representar las posiciones de las alternativas, tomamos el procedimiento propuesto en Contreras (2010). A partir de las variables binarias δ y γ puede inducirse la posición que cada alternativa ocupa en el

orden inducido a partir de los valores IS_i^C , posición que denotamos por r_i , incluyendo el siguiente conjunto de restricciones,

$$\begin{aligned}
 IS_i^C - IS_h^C + \delta_{ih} \cdot B &\geq 0, \quad \forall i \neq h \\
 IS_i^C - IS_h^C + \gamma_{ih} \cdot B &\geq \varepsilon, \quad \forall i \neq h \\
 \delta_{ih} + \delta_{hi} &\leq 1, \quad \forall i \neq h \\
 \delta_{ih} + \gamma_{hi} &= 1, \quad \forall i \neq h \\
 r_i &= \sum_{i \neq h} \frac{\delta_{ih} + \gamma_{ih}}{2} + 1, \quad \forall i \\
 \delta_{ih}, \gamma_{ih} &\in \{0, 1\}, \quad \forall i, h.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Donde B representa un número suficientemente grande y ε un infinitésimo que se incluye para discriminar entre valores, de manera que pueda afirmarse que $IS_i > IS_h$ si se verifica que $IS_i - IS_h \geq \varepsilon$.

Las variables binarias δ y γ permiten construir el orden de la siguiente manera. La variable δ_{ih} debe ser igual a uno si i es dominado estrictamente por h , es decir, si $IS_h > IS_i$. Por contra, γ_{ih} debe ser uno siempre que $IS_h \geq IS_i$. Esta variable captura los empates entre alternativas. En el Cuadro 1 se resumen las asignaciones de valores que deben adoptarse en cada caso.

Cuadro 1: Values of binary variables

	δ_{ih}	δ_{hi}	γ_{ih}	γ_{hi}
$IS_i > IS_h$	0	1	0	1
$IS_i = IS_h$	0	0	1	1
$IS_i < IS_h$	1	0	1	0

Es importante destacar cómo el número de alternativas empatadas puede calcularse a través de estas variables binarias, en particular el número de alternativas empatadas viene dado por la suma

$$\sum_{i \neq h} \frac{(\gamma_{ih} - \delta_{ih})}{2}. \tag{7}$$

Nótese como cuando una alternativa domina estrictamente a otra (o bien es dominada), la diferencia entre las variables es cero mientras que si empatan esta diferencia es igual a 1 (como se hace el cómputo de todas las alternativas ha de dividirse por dos puesto que se suma por duplicado).

El primer paso será determinar si es posible, con los datos del problema, obtener una ordenación completa de las alternativas utilizando un esquema de pesos común. Para ello se resuelve el siguiente problema,

$$\begin{aligned}
 E^* = \min \quad & \sum_{i \neq h} \frac{(\gamma_{ih} - \delta_{ih})}{2} \\
 \text{s.t.} \quad & IS_i = \prod_{j \in J} I_{ij}^{w_j^c} \quad i \in I \\
 & IS_i^C - IS_h^C + \delta_{ih} \cdot B \geq 0, \quad \forall i \neq h \\
 & IS_i^C - IS_h^C + \gamma_{ih} \cdot B \geq \varepsilon, \quad \forall i \neq h \\
 & \delta_{ih} + \delta_{hi} \leq 1, \quad \forall i \neq h \\
 & \delta_{ih} + \gamma_{hi} = 1, \quad \forall i \neq h \\
 & \delta_{ih}, \gamma_{ih} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, h.
 \end{aligned} \tag{8}$$

El valor óptimo obtenido, E^* mide el número mínimo de alternativas que empatan con los datos ofrecidos en la matriz de indicadores, en caso de que pueda inducirse un orden completo se tiene que $E^* = 0$. Note que en ocasiones no será posible obtener una ordenación completa de las alternativas puesto que, en un caso muy simple, dos alternativas pueden tener los valores iguales en todos los indicadores individuales. Una vez determinado este número, el paso final consiste en determinar aquel vector de pesos w^c , de los que permiten inducir una ordenación con el número mínimo de empates, que minimiza la distancia a los valores ideales de cada alternativa. Para ello, resolvemos el siguiente problema,

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i \in I} (IS_i^* - IS_i^C)^p \\
 \text{s.t.} \quad & IS_i = \prod_{j \in J} I_{ij}^{w_j^c} \quad i \in I \\
 & IS_i^C - IS_h^C + \delta_{ih} \cdot B \geq 0, \quad \forall i \neq h \\
 & IS_i^C - IS_h^C + \gamma_{ih} \cdot B \geq \varepsilon, \quad \forall i \neq h \\
 & \delta_{ih} + \delta_{hi} \leq 1, \quad \forall i \neq h \\
 & \delta_{ih} + \gamma_{hi} = 1, \quad \forall i \neq h \\
 & r_i = \sum_{i \neq h} \frac{\delta_{ih} + \gamma_{ih}}{2} + 1, \quad \forall i \\
 & \sum_{i \neq h} \frac{(\gamma_{ih} - \delta_{ih})1}{2} = E^*, \\
 & \delta_{ih}, \gamma_{ih} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, h.
 \end{aligned} \tag{9}$$

El conjunto de restricciones del modelo (9) pueden expresarse de manera lineal simplemente tomando logaritmo base e . De igual manera puede obtenerse una expresión lineal de la función objetivo para los casos en que $p = 1$ o $p = \infty$. En tales casos, la solución puede obtenerse resolviendo un problema de programación lineal entera. Por contra, si $p = 2$, la solución del problema obliga a resolver un problema no lineal, si bien el conjunto factible está determinado por un conjunto de inecuaciones lineales.

4. EJEMPLO ILUSTRATIVO

En esta sección, presentamos un ejemplo numérico para ilustrar el funcionamiento del procedimiento anterior. En la valoración de franquicias, se deben considerar múltiples variables y aspectos relacionados con el funcionamiento de las enseñanzas. La construcción de un sistema de indicadores permite captar la información relacionada con aspectos diversos que, en su conjunto, ofrecen una imagen del funcionamiento de la misma. La construcción de un indicador sintético se muestra como una herramienta valiosa en tanto permite a un potencial franquiciado evaluar esta cantidad de información multidimensional a través de un único valor (sin necesidad de ser experto en múltiples materias).

Consideramos datos del sector de comida rápida en España, para lo que consideramos

las 24 entidades que operaban en 2009 en España. A partir de la información recopilada de diferentes fuentes se ha construido un sistema de 20 indicadores que intentan sintetizar todos los aspectos relevantes para evaluar el buen funcionamiento de una empresa cuya actividad se ejerce mediante esta fórmula comercial. La información de las dimensiones consideradas así como de los valores del sistema de indicadores se resume en el Cuadro 2. Es importante destacar que los datos originales han sido normalizados adecuadamente para la construcción de esta matriz de valores.

Cuadro 2: Resumen del sistema de indicadores

Dimensiones	Indicadores	Notación	Media	Max.	Min
<i>A. Tamaño</i>	A1. Establecimientos en España	I_1	128.63	1187	4
	A2. Establecimientos en el mundo	I_2	2930.04	32000	0
<i>B. Dispersion</i>	B1. Internacionalización	I_3	72.54	100	0.10
	B2. Población mínima	I_4	97.75	225	6
<i>C. Crecimiento</i>	C1. Establecimientos abiertos por año	I_5	70.08	711.82	0.70
	C2. Establecimientos abiertos por año en España	I_6	5.93	53.95	0.13
	C3. Establecimientos abiertos por año desde inicio	I_7	94.39	970.67	0.57
<i>D. Coste de adhesión</i>	D1. Inversión media necesaria	I_8	196570.83	600000	3700
	D2. Cuota de entrada	I_9	21847.38	50000	1950
	D3. Porcentaje de cuota sobre inversión	I_{10}	15.03	52.70	6.67
	D4. Royalty (porcentaje de ventas)	I_{11}	4.20	8	0.01
	D5. Cuota de publicidad (porcentaje de ventas)	I_{12}	3.02	5	0
	D6. Superficie mínima	I_{13}	97.75	225	6.00
	D7. Personal mínimo	I_{14}	6.67	25	1.00
<i>E. Contrato</i>	E1. Duración (años)	I_{15}	8.46	20	1.00
	E2. Exclusividad	I_{16}	1.25	2	1.00
<i>F. Duración</i>	F1. Porcentaje de unidades franquiciadas	I_{17}	82.54	100	50.00
	F2. Años desde inicio	I_{18}	21.96	71	3.00
	F3. Años en sistema de franquicia	I_{19}	14.21	39	0
	F4. Años hasta primer franquiciado	I_{20}	7.79	56	0

Si se valoran las unidades considerando esquemas de pesos individuales, utilizando el modelo propuesto por Zhou et al. (2010), modelo 3 considerando que $\varepsilon = 0,00001$, todas las unidades alcanzan la máxima valoración, esto es, los indicadores sintéticos asociados a las 24 enseñanzas son iguales a la unidad por lo que no es posible discriminar entre ninguna

de ellas.

Consideramos la construcción de los indicadores con un esquema de pesos común determinando aquella solución que minimiza la distancia total de los indicadores con su correspondiente valor ideal (que en este caso es igual a $IS_i^* = 1$ para cualquier $i \in I$). Sin embargo, tanto si se utiliza la métrica l_1 como la distancia euclídea para medir la distancia de cada valor a su ideal, o bien se desea minimizar la distancia máxima del conjunto de unidades se producen empates entre alternativas (mas frecuentes en el primer caso), en particular por aquellas alternativas que pueden alcanzar la máxima valoración con este nuevo esquema de ponderación común.

Aplicando el procedimiento propuesto determinamos, en primer lugar, el número mínimo de empates que permite la matriz de datos. En el caso que nos ocupa permite obtener una ordenación completa de la misma por lo que establecemos como objetivo del modelo (9) que $E^* = 0$. En el Cuadro 3 se resumen los resultado obtenido en cada una de las métricas consideradas. En cada caso, métricas l_1 , l_2 y solución minimax, las dos primeras columnas representan el caso inicial en el que no se establece como objetivo eliminar empates mientras que las tres siguientes son los valores correspondientes al modelo propuesto que permite inducir una ordenación completa de las unidades.

En cuanto a los resultados es interesante apuntar cómo el procedimiento propuesto permite construir un sistema de indicadores que discrimina totalmente el conjunto de alternativas, frente a las once alternativas empatadas de los modelos basados en las distancias l_1 y l_2 y las siete del modelo basado en la l_∞ . Esta propiedad es especialmente interesante si se desea inducir un orden a partir de los valores en tanto no existen alternativas que no pueden ser comparadas entre si.

En la Tabla anterior se muestran las soluciones obtenidas con las tres métricas consideradas en el texto. Será labor del analista decidir cuál de las mismas debe utilizarse, lo que dependerá del objetivo con el que se construye el sistema de indicadores o la capacidad de discriminación de cada una de ellas. Como puede verse en los resultados, existen

Cuadro 3: Resumen de resultados

Unidad	Distancia l_2				Distancia l_1				Solución Minimax			
	IS_i^C	Pos.	IS_i^C	Pos.	IS_i^C	Pos.	IS_i^C	Pos.	IS_i^C	Pos.	IS_i^C	Pos.
BOCATA	0,9973	7	0,9960	5	1,0000	4,5	0,9990	2	0,9604	9	0,9760	9
ADK	0,9526	19,5	0,9531	20	0,9368	21	0,9455	20	0,9070	22	0,9135	21
KFC	0,9505	21	0,9491	21	0,9467	19	0,9442	21	0,9297	20	0,9464	18
PANS & COMPANY	0,9716	12,5	0,9695	13	0,9716	14	0,9695	13	0,9518	11	0,9562	14
PEGGY SUE'S	0,9829	10	0,9800	10	1,0000	4,5	0,9914	9	0,9493	13	0,9843	6
PIZZA HUT	1,0000	2,5	0,9980	3	1,0000	4,5	0,9960	5	0,9647	7	1,0000	1
POLLO CAMPERO	0,9071	24	0,9069	24	0,8974	24	0,8984	24	0,9010	23,5	0,9125	22
BIG DOG	0,9464	22	0,9481	22	0,9331	22	0,9405	22	0,9363	19	0,9115	23
BOCATAS CALENTITOS	0,9608	16,5	0,9573	18	0,9726	13	0,9671	15	0,9493	13	0,9622	10
BRUTUS	0,9987	5,5	0,9940	7	0,9930	9	0,9924	8	0,9916	3,5	0,9795	8
BURGUER KING	0,9852	8	0,9888	8	0,9613	17,5	0,9681	14	0,9493	13	0,9494	15
CANEL ROLLS	0,9526	19,5	0,9547	19	0,9613	17,5	0,9602	18	0,9380	18	0,9358	19
CRUJI COQUES	1,0000	2,5	0,9990	2	1,0000	4,5	0,9980	3	1,0000	1,5	0,9978	2
GIROS GRIEGO	0,9716	12,5	0,9721	12	0,9868	10	0,9818	11	0,9469	15	0,9612	11
ISTANBUL	0,9582	18	0,9595	16	0,9644	15,5	0,9647	16	0,9136	21	0,9484	16
KONOPIZZA	0,9281	23	0,9255	23	0,9293	23	0,9225	23	0,9010	23,5	0,9089	24
OHLALÁ	0,9619	15	0,9615	14	0,9442	20	0,9541	19	0,9406	16,5	0,9264	20
PIZZON PIZZA	0,9763	11	0,9768	11	0,9858	11	0,9833	10	0,9663	5	0,9602	12
ROCK & RIBS	1,0000	2,5	1,0000	1	1,0000	4,5	1,0000	1	1,0000	1,5	0,9833	7
RODILLA	0,9842	9	0,9843	9	1,0000	4,5	0,9940	7	0,9916	3,5	0,9926	3
SUBWAY	1,0000	2,5	0,9970	4	1,0000	4,5	0,9970	4	0,9647	7	0,9916	4
TELEPIZZA	0,9987	5,5	0,9950	6	1,0000	4,5	0,9950	6	0,9647	7	0,9906	5
TELERICATORTA	0,9630	14	0,9585	17	0,9644	15,5	0,9625	17	0,9530	10	0,9474	17
EL DANÉS HOT DOG	0,9608	16,5	0,9605	15	0,9824	12	0,9739	12	0,9406	16,5	0,9592	13

diferencias apreciables entre las tres posibilidades, tanto si se comparan los modelos tradicionales como si se compara la nueva propuesta, muestra de que la elección de una u otra métrica debe hacerse de manera justificada.

5. CONCLUSIONES

Los indicadores sintéticos constituyen una herramienta práctica muy útil a la hora de evaluar conceptos multidimensionales. Desde un punto de vista técnico, la construcción

del indicador sintético supone, implícitamente, la adopción de un conjunto de decisiones subjetivas por parte del analista que pueden determinar en cierta medida los resultados obtenidos. El mayor o menor grado de subjetividad asociado a los valores de los indicadores sintéticos han fundamentado multitud de críticas. A pesar de ello, los indicadores sintéticos no han dejado de ser usados en la práctica. El propósito con el que se construya la medida sintética así como de la naturaleza de la materia evaluada, marcan en gran medida la elección de la metodología aplicada para su obtención. En este estudio, hemos propuesto un nuevo procedimiento inspirado en los modelos de beneficio de la duda, que permite contrarrestar algunas de sus limitaciones (tales como la no discriminación bajo un sistema de ponderación común, las obtención de situaciones extremas y empates entre alternativas) y que es adecuado para aquellos casos en los que el propósito principal sea proporcionar al usuario la mayor cantidad posible de información contenida en el sistema de partida. Para cumplir este propósito, la metodología propuesta cumple una serie de requisitos, que constituyen a la vez sus principales ventajas. En primer lugar, la cantidad de información perdida al realizar la agregación es mínima puesto que se sigue una regla multiplicativa al sintetizar el sistema. Asimismo, esta regla de agregación garantiza un menor grado de compensación entre los indicadores iniciales que presenten un valor más pequeño. Esta característica dota al indicador sintético final una mayor facilidad a la hora de interpretar las ordenaciones finales de las alternativas, para poder realizar propuestas de mejora en la posición alcanzada por cada una de ellas. Por otra parte, la metodología propuesta respeta la esencia del criterio del beneficio de la duda reduciendo la subjetividad asociada al indicador. Para solventar las limitaciones de este enfoque, el procedimiento propuesto permite determinar de forma endógena un conjunto de pesos común para el conjunto de unidades (obtenido minimizando la distancia a un punto ideal) e inducir una ordenación de las alternativas de forma completa (es decir, minimizando los empates entre ellas). Esto tiene una consecuencia práctica esencial: hace que la metodología propuesta pueda ser aplicada para el estudio de situaciones donde el sistema de indicadores inicial

está compuesto por un alto número de indicadores, mejorando la operatividad del enfoque del beneficio de la duda para este tipo de aplicaciones.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHARNES, A., COOPER, W.W., RHODES, E. (1978) "Measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operational Research* 2, pp. 429-444.
- CHERCHYE, L., KUOSMANEN, T. (2002). "Benchmarking Sustainable Development: A Synthetic Meta-index Approach". *United Nations University Press*.
- CHERCHYE, L., MOESEN, W., ROGGE, N. y PUYENBROECK, T. (2007). "An Introduction to 'Benefit of the Doubt' Composite Indicators". *Social Indicators Research*, 82, 1, pp. 111-145.
- CONTRERAS, I. (2010). "A Distance-Based Consensus Model with Flexible Choice of Rank-Position Weights". *Group Decision and Negotiation*, doi:10.1007/s10726-008-9127-9.
- den BUTTER, F.A.G., van den EYDEN, J.A.C. (1998). "A Pilot Index for Environmental Policy in the Netherlands". *Energy Policy*, 26, pp. 95-101.
- DESPOTIS, D.K. (2002). "Improving the Discriminating Power of DEA: Focus on Globally Efficient Units". *Journal of the Operational Research Society*, 53, pp. 314-323.
- EBERT, U., WELSCH, H. (2004). "Meaningful Environmental Indices: a Social Choice Approach". *Journal of Environmental Economics and Management*, 47, pp. 270-283.

- ESTY, D.C., LEVY, M., SREBOTNJAK, T., SHERBININ, A., (2005). "Environmental Sustainability Index: Benchmarking National Environmental Stewardship. Yale Center of Environmental Law and Policy, New Haven, Conn.
- GINSBERG, N., OSBORN, J., BLANK, G., (1986). "Geographic Perspectives on the Wealth of Nations". Department of Geography Research Paper No. 220, University of Chicago, Chicago
- KANG, S.M. (2002). "A Sensitivity Analysis of the Korean Composite Environmental Index". *Ecological Economics*, 43, pp. 159-174.
- MAHLBERG, B. OBERSTEINER, M. (2001). "Remeasuring the HDI by Data Envelopment Analysis". International Institute for Applied System Analysis, Interim Report IR-01-069.
- MARTÍNEZ, F., DOMÍNGUEZ, M., MURIAS, P. (2005): "El Análisis Envoltante de Datos en la Construcción de Indicadores Sintéticos. Una Aplicación a las Provincias Españolas". *Estudios de Economía Aplicada*, 23, pp. 753-771.
- MUNDA, G. (2005). "Measuring Sustainability: A Multi-Criterion Framework". *Environment, Development and Sustainability*, 7, pp. 117-134.
- MUNDA, G., NARDO, M. (2003). "On the Methodological Foundations of Composite Indicators Used for Ranking Countries". OECD/JRC Workshop on composite indicators of country performance, Ispra, Italy. Edición electrónica en texto completo en <http://webfarm.jrc.cec.eu.int/uasa/evt-OECD-JRC.asp>.
- MUNDA, G., NARDO, M. (2005). "Constructing consistent composite indicators: The issue of weights". Technical Report EUR 21834 EN, European Commission.
- MUNDA, G., NARDO, M. (2009): "Noncompensatory/ Nonlinear Composite Indicators for Ranking Countries: A Defensible Setting". *Applied Economics*, 41,

1513-1523.

- NARDO, M., SAISANA, M., SALTELLI, A., TARANTOLA, S., HOFFMAN, A., GIOVANNINI, E. (2005). "Handbook on Constructing Composite Indicators: Methodology and User Guide". OECD Statistics Working Papers.
- NICOLETTI, G., SCARPETTA, S., BOYLAUD, O. (2000). "Summary Indicators of Products Market Regulation with an Extension to Employment Protection Legislation". OECD Economics Department Working Papers n° 226.
- OECD, 2008. "Handbook on Constructing Composite Indicators. Methodology and User Guide". OECD Publications, Paris.
- SAISANA, M., TARANTOLA, S. (2002). "State - of - the - Art Report on Current Methodologies and Practices for Composite Indicator Development". Joint Research Centre, European Commission.
- YOON, K.P., HWANG, C.L. (1995). "Multiple Attribute Decision Making: An Introduction". Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- ZHOU, O., ANG, B.W. POH, K.L. (2006). "Comparing Aggregating Methods for Constructing the Composite Environmental Index: An Objective Measure". Ecological Economics, 59, PP. 305-311.
- ZHOU, P., ANG, B.W. (2009). "Comparing MCDA Agregation Methods in Constructing Composite Indicators using the Shannon-Spearman Measure". Social Indicators Research, 94, 1, pp. 83-96.
- ZHOU, P., ANG, B.W., ZHOU, D.Q. (2010). "Weighting and Aggregation in Composite Indicators Construction: A Multiplicative Optimization Approach". Social Indicators Research, 96, pp. 169-181.